Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Envoi Numéro 2

À renvoyer au plus tard le 12 décembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement:

Le groupe B est constitué:
* des collégiens;
* des élèves de Seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe B ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés communs sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit A un point extérieur à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Un point P se déplace sur $\mathscr{C}$. Soit M le point d'intersection entre (AP) et la bissectrice de $\widehat{POA}$. Montrer que M se déplace sur un cercle que l'on décrira.

Exercice 2. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 60°$. On note O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit et H l'orthocentre. Montrer que
1) B, C, O, I, H sont cocycliques
2) OIH est isocèle.

Exercice 3. Par un point A d'un cercle de centre O, on mène une tangente à ce cercle, et on prend deux points B et C sur cette tangente, avec C entre A et B. De B et C, on mène (BD) et (CE) tangentes au cercle. Démontrer que $\widehat{BOC} = \widehat{DAE}$.

Exercices communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle. Soit P appartenant au cercle circonscrit. On sait que les projetés de P sur (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la droite dite de Simson. On suppose que cette droite passe par le point diamétralement opposé à P. Montrer qu'elle passe également par le centre de gravité de ABC.

Exercice 5. Soit ABC un triangle. On suppose que la médiane (BM) et la bissectrice (CD) se coupent en un point J tel que $JB = JC$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $JM = JH$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, et D, E, F les pieds des hauteurs de A, B, C respectivement. On définit aussi H l'orthocentre de ABC, O le centre de son cercle circonscrit, et X le point de la droite (EF) qui vérifie $XA = XD$. Montrer que les droites (AX) et (OH) sont perpendiculaires.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit ABC un triangle, et Γ son cercle circonscrit. Soit M le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Un cercle $\mathscr{C}$ est tangent à $[AB)$, $[AC)$ en D et E respectivement, et tangent intérieurement à Γ en F. Montrer que (DE), (BC) et (FM) sont concourantes.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, D, E, F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés (BC), (AC) et (AB), M le milieu de $[BC]$, I le centre du cercle inscrit de ABC. G et H sont définis comme les symétriques de E et F par rapport à I. On note Q l'intersection entre les droites (BC) et (GH). Montrer que les droites (IQ) et (IM) sont perpendiculaires.

Exercice 9. Soit ABC un triangle non-isocèle en A. On note D, E, F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés (BC), (AC) et (AB), I le centre du cercle inscrit de ABC. Soient P et Q les intersections de la droite (EF) avec le cercle Ω circonscrit à ABC. Soient enfin O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits à AIB et AIC. Montrer que le centre du cercle circonscrit à DPQ se situe sur la droite (O_1O_2).