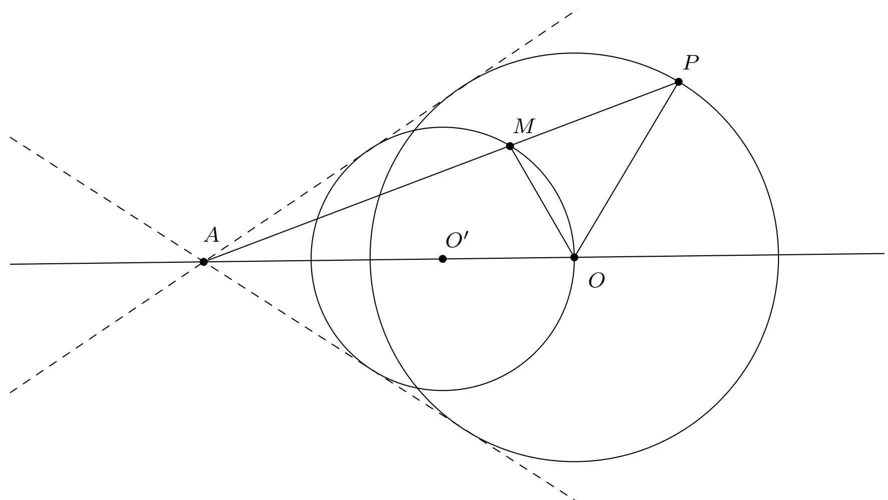
Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Envoi Numéro 2 : corrigé

Exercice 1. Soit A un point extérieur à un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Un point P se déplace sur $\mathscr{C}$. Soit M le point d'intersection entre (AP) et la bissectrice de $\widehat{POA}$. Montrer que M se déplace sur un cercle que l'on décrira.

Solution de l'exercice 1



Notons $d = OA$ et R le rayon du cercle.

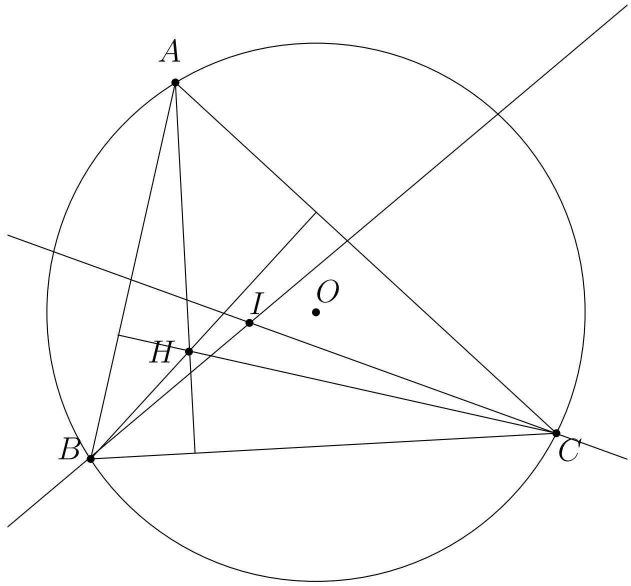
D'après le théorème de la bissectrice, on a $MP/MA = OP/OA$, donc $\dfrac{MA}{AP} = \dfrac{MA}{MA+MP} = \dfrac{1}{1+\frac{MP}{MA}} = \dfrac{1}{1+\frac{OP}{OA}} = \dfrac{OA}{OA+OP} = \dfrac{d}{d+R}$. Notons k cette valeur. Soit O' le point de $[AO]$ tel que $AO' = kAO$. D'après le théorème de Thalès, les droites $(O'M)$ et (OP) sont parallèles, donc $\dfrac{O'M}{OP} = \dfrac{AM}{AP} = k$, donc $O'M = kR$. Ceci prouve que M décrit le cercle de centre O' et de rayon kR.

Remarquons que $AO' + kR = k(d+R) = d$, donc ce cercle passe par O.

Exercice 2. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 60°$. On note O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit et H l'orthocentre. Montrer que

1) B, C, O, I, H sont cocycliques
2) OIH est isocèle.

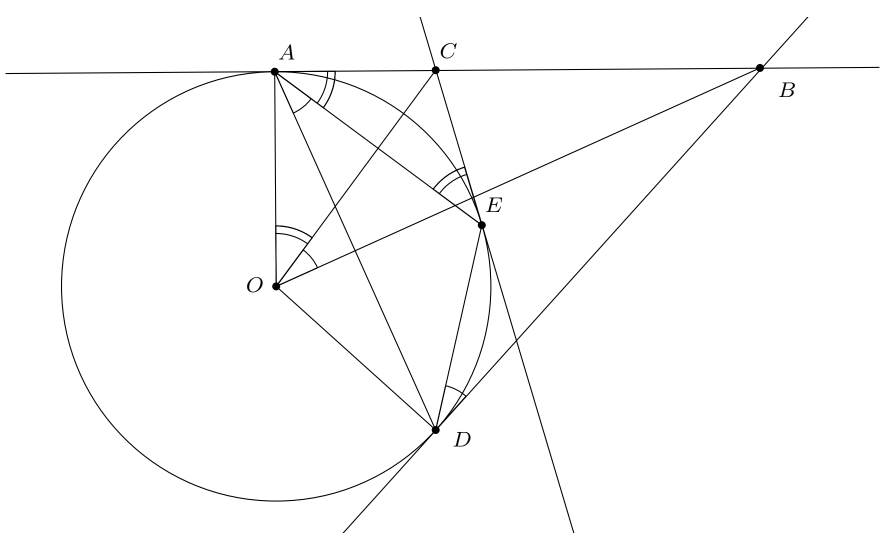
Solution de l'exercice 2



On utilise les angles de droites. Les angles sont modulo $180°$.
1) $(HB, HC) = (HB, AC)+(AC, AB)+(AB, HC) = D-(AB, AC)+D = -(AB, AC) = -60° = 120° = (OB, OC)$ (où on a noté D l'angle droit), donc B, H, O, C sont cocycliques.
$(IB, IC) = (IB, BC) + (BC, IC) = -\widehat{B}/2 - \widehat{C}/2 = -120/2 = -60° = 120°$, donc I se trouve également sur ce cercle.
2) $(CO, CI) - (CI, CH) = (CO, CB) + (CB, CI) - (CI, CB) - (CB, CH) = (CO, CB) + (CH, CB) + 2(CB, CI) = (90 - \widehat{A}) + (90 - \widehat{B}) - \widehat{C} = 0$, donc $(CO, CI) = (CI, CH)$. On a donc $(OI, OH) = (CI, CH) = (CO, CI) = (HO, HI)$, donc OIH est isocèle en I.

Exercice 3. Par un point A d'un cercle de centre O, on mène une tangente à ce cercle, et on prend deux points B et C sur cette tangente, avec C entre A et B. De B et C, on mène (BD) et (CE) tangentes au cercle. Démontrer que $\widehat{BOC} = \widehat{DAE}$.

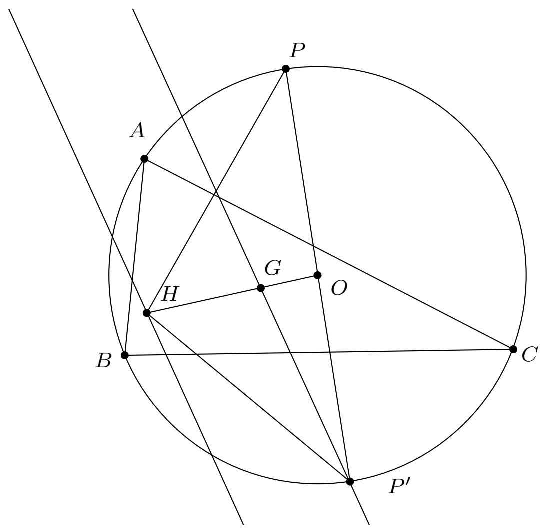
Solution de l'exercice 3



Notons $\alpha = \widehat{BDE}$ et $\beta = \widehat{CEA}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\alpha = \widehat{DAE}$.
Comme (CA) et (CE) sont les deux tangentes menées à partir de C, on a $\widehat{EAC} = \widehat{CEA} = \beta$.
$\widehat{BOC} = \widehat{BOA} - \widehat{COA}$. Or, $(BO) \perp (AD)$ et $(OA) \perp (AC)$, donc $\widehat{BOA} = \widehat{DAC} = \alpha + \beta$, et de même $\widehat{COA} = \beta$, donc $\widehat{BOC} = \alpha = \widehat{DAE}$.

Exercice 4. Soit ABC un triangle. Soit P appartenant au cercle circonscrit. On sait que les projetés de P sur (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la droite dite de Simson. On suppose que cette droite passe par le point diamétralement opposé à P. Montrer qu'elle passe également par le centre de gravité de ABC.

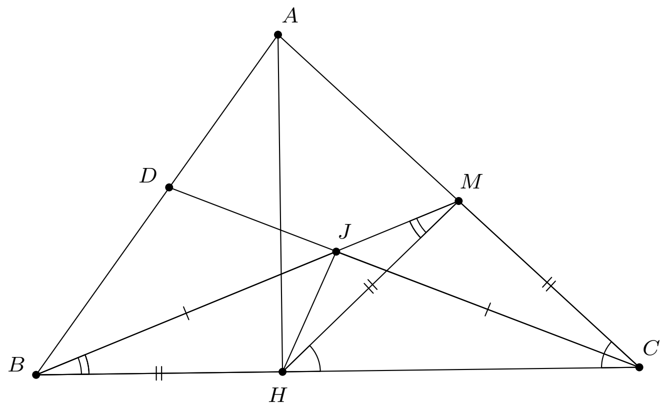
Solution de l'exercice 4



Notons P' le point diamétralement opposé à P. Soit Δ la droite de Simson. Soit h l'homothétie de centre P et de rapport 2. Alors $h(\Delta)$ est la droite de Steiner. On sait qu'elle passe par l'orthocentre H, donc Δ passe par le milieu de $[PH]$. On en déduit que Δ est la médiane de $PP'H$ issue de P'.
Par ailleurs, (HO) est la médiane de $PP'H$ issue de H. Comme $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$, le point G est le centre de gravité de PHP', donc Δ passe par G.

Exercice 5. Soit ABC un triangle. On suppose que la médiane (BM) et la bissectrice (CD) se coupent en un point J tel que $JB = JC$. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $JM = JH$.

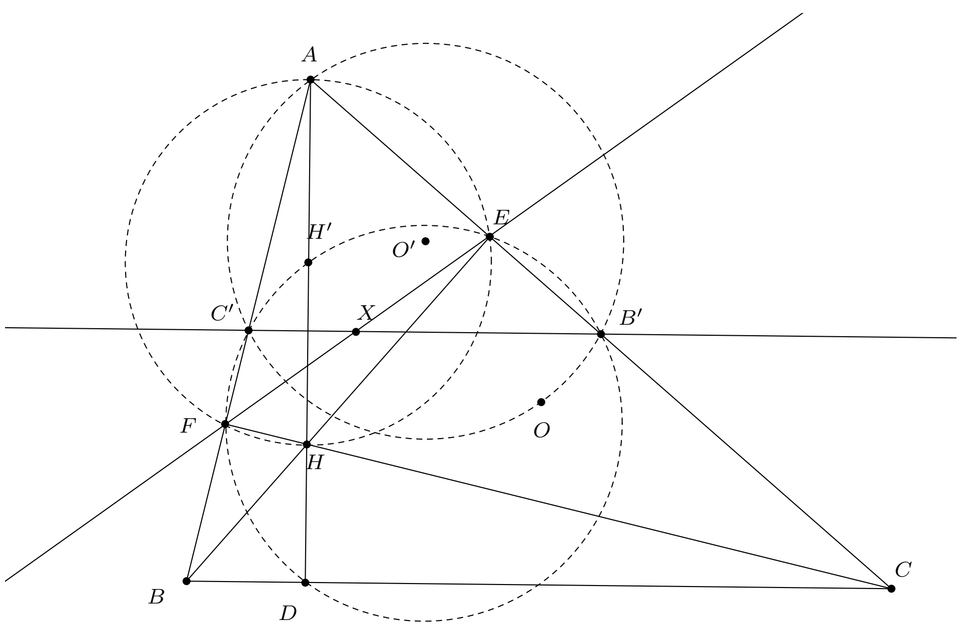
Solution de l'exercice 5



Notons $\gamma = \widehat{ACB}$. On a $MA = MC = MH$, donc $\widehat{CHM} = \gamma$.
On a aussi $\widehat{CHM} = 180^\circ - \widehat{MHB} = \widehat{HBM} + \widehat{BMH}$.
De plus, $\widehat{HBM} = \widehat{DCB} = \gamma/2$, donc $\widehat{BMH} = \widehat{HMB} = \gamma/2$.
On en déduit que $BH = HM = MC$. Les triangles BHJ et CMJ vérifient $BJ = CJ$, $\widehat{HBJ} = \widehat{MCJ}$ et $BH = CM$ donc sont isométriques. Par conséquent, $JH = HM$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, et D, E, F les pieds des hauteurs de A, B, C respectivement. On définit aussi H l'orthocentre de ABC, O le centre de son cercle circonscrit, et X le point de la droite (EF) qui vérifie $XA = XD$. Montrer que les droites (AX) et (OH) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 6

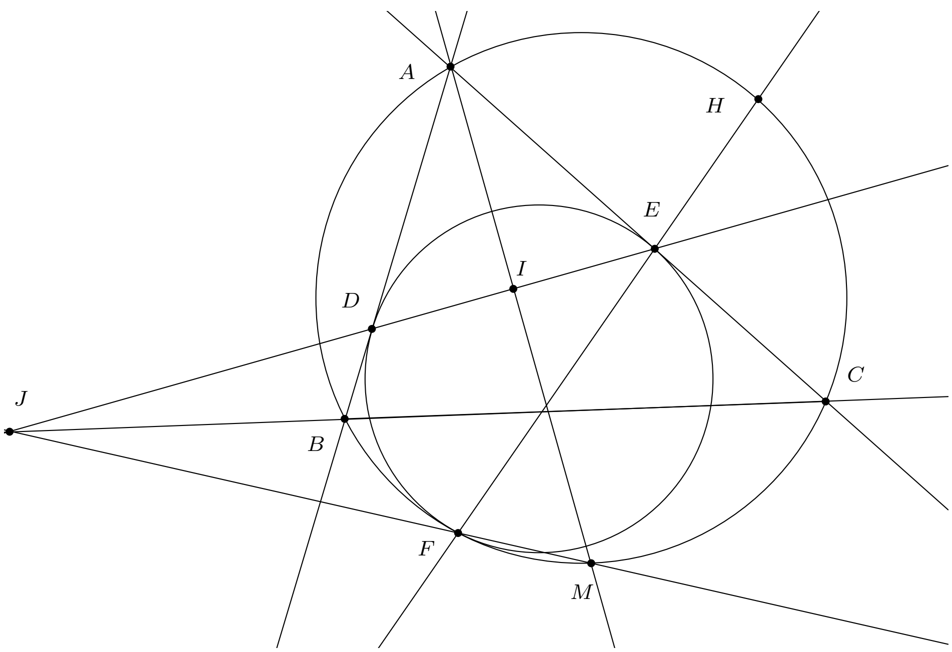


On sait que l'axe radical de deux cercles est une droite perpendiculaire à la droite passant par les centres des deux cercles.
La condition $XA = XD$ signifie que X est sur la médiatrice de $[AD]$, qui n'est autre que le droite des milieux $(B'C')$ (avec B' et C' les milieux de $[AC]$ et de $[AB]$). On sait aussi que les points

A, E, F, H sont cocycliques d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit. De, plus $[AH]$ étant un diamètre du cercle passant par ces quatre points, le milieu H' de $[AH]$ est le centre de ce cercle.
Le centre du cercle passant par A, B', C' est le milieu O' de $[AO]$ (par propriété de l'homothétie de centre A et de rapport $1/2$). On sait que $(O'H')$ et (OH) sont parallèles. Le problème revient donc à montrer que (AX) et $(O'H')$ sont perpendiculaires. Nous allons montrer ici que (AX) est en fait l'axe radical des deux cercles évoqués précédemment, ce qui terminera l'exercice d'après la propriété évoquée au début de la preuve.
A étant sur les deux cercles, est bien sur leur axe radical. On sait de plus que B', C', E, F sont cocycliques sur le cercle d'Euler du triangle ABC. Ainsi on a l'égalité de longueurs : $XC' \times XB' = XE \times XF$, ce qui signifie que X est bien sur l'axe radical de nos deux cercles.
Ainsi on a bien (AX) et (OH) qui sont perpendiculaires.

Exercice 7. Soit ABC un triangle, et Γ son cercle circonscrit. Soit M le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Un cercle $\mathscr{C}$ est tangent à $[AB)$, $[AC)$ en D et E respectivement, et tangent intérieurement à Γ en F. Montrer que (DE), (BC) et (FM) sont concourantes.

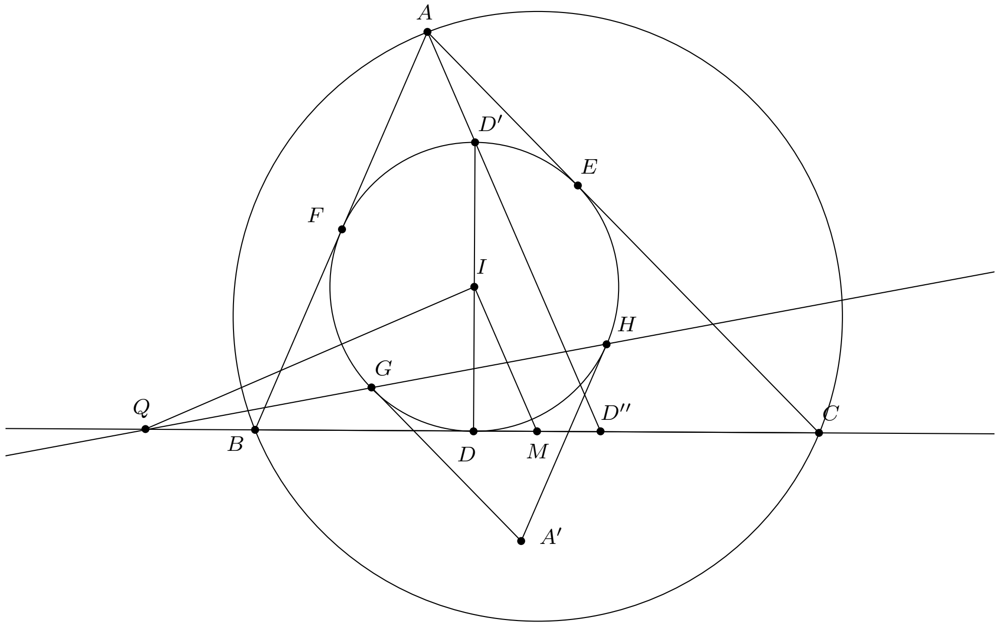
Solution de l'exercice 7



Soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. La droite (EF) recoupe Γ en un point H. Soit J le point d'intersection de (BC) avec (FM).
Il est facile de voir que H est le milieu de l'arc AC ne contenant pas B : en effet, l'homothétie de centre F qui envoie $\mathscr{C}$ sur Γ envoie (AC) sur la tangente en H à Γ ; celle-ci est parallèle à (AC), ce qui entraîne que H est le milieu de l'arc, et par conséquent B, I, H sont alignés.
En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone $AMFHBC$, on obtient que I, E, J sont alignés. De même, D, I, J sont alignés. Ainsi, (DE), (BC) et (FM) se rencontrent en J.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, D, E, F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés (BC), (AC) et (AB), M le milieu de $[BC]$, I le centre du cercle inscrit de ABC. G et H sont définis comme les symétriques de E et F par rapport à I. On note Q l'intersection entre les droites (BC) et (GH). Montrer que les droites (IQ) et (IM) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 8



Soit ω le cercle inscrit de ABC.
On notera pour tout point X du plan $p(X)$ la polaire de X par rapport à ω. On sait que pour tout point X du plan, $p(X)$ est une droite perpendiculaire à (IX). Nous allons donc montrer que $p(Q)$ et (IM) sont parallèles pour en déduire le résultat.
On sait que $p(D) = (BC)$, et que $Q \in (BC)$ donc $Q \in p(D)$. Ainsi par propriété des polaires (par rapport à un cercle fixé), on en déduit que $D \in p(Q)$. De plus par construction de la polaire, on sait que A' le point d'intersection des tangentes à ω en G et H est aussi sur la polaire de Q. Ainsi on a : $p(Q) = (DA')$. Par symétrie de la construction, on sait que A et A' sont symétriques par rapport à I.
Soit maintenant D' le symétrique de D par rapport à I (qui est donc sur ω) et D'' le point de (BC) tel que M soit le milieu de $[DD'']$. Une homothétie envoyant une droite sur une droite qui lui est parallèle, on sait que les droites (DA') et $(D'A)$ sont parallèles, ainsi que les droites (IM) et $(D'D'')$. Or il est connu que les points A, D', D'' sont alignés (se montre par une homothétie de centre A).
Ainsi les droites (DA') et (IM) sont parallèles, et (DA') et (QI) étant perpendiculaires, on en déduit que (IQ) et (IM) sont bien perpendiculaires.

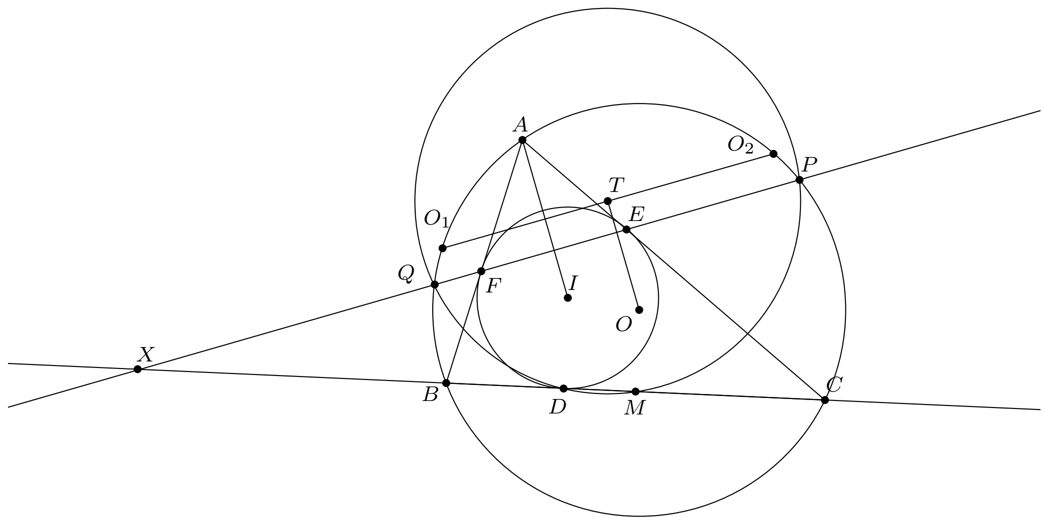
Autre solution. Notons α, β et γ les angles de DEF et R le rayon du cercle circonscrit à DEF. On a $BD = R\tan\beta$, $CD = R\tan\gamma$ donc

$$2DM = BC - 2BD = R(\tan\gamma - \tan\beta) = R\frac{\sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma} = R\frac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

D'autre part, la loi des sinus dans QDH donne $DQ = DH\dfrac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)} = 2R\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}$ donc $QD.DM = R^2 = DI^2$. Or, $[ID]$ est la hauteur de IQM issue de I, donc IQM est rectangle en I.

Exercice 9. Soit ABC un triangle non-isocèle en A. On note D, E, F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés (BC), (AC) et (AB), I le centre du cercle inscrit de ABC. Soient P et Q les intersections de la droite (EF) avec le cercle Ω circonscrit à ABC. Soient enfin O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits à AIB et AIC. Montrer que le centre du cercle circonscrit à DPQ se situe sur la droite (O_1O_2).

Solution de l'exercice 9



On peut déjà remarquer que O_1 et O_2 sont les pôles sud de C et de B respectivement dans le triangle ABC. La droite (O_1O_2) est la médiatrice de $[AI]$. Or les droites (AI) et (EF) sont perpendiculaires. On en déduit alors que les droites (PQ) et (O_1O_2) sont parallèles. Comme $[PQ]$ et $[O_1O_2]$ sont aussi des cordes de Ω, ces segments ont la même médiatrice. En particulier l'intersection entre la médiatrice de $[PQ]$ et (O_1O_2) est le milieu de $[O_1O_2]$, disons T.
Ainsi si l'énoncé est vrai, alors le centre du cercle circonscrit à DPQ doit être T.
Dans cette situation, on contrôle alors assez mal les deux autres médiatrices du triangle PQD. On peut alors chercher un quatrième point appartenant au cercle. En particulier, définir un point comme seconde intersection entre un cercle et une droite peut souvent s'avérer utile.
Ici on peut s'intéresser à la seconde intersection de notre cercle avec la droite (BC) : c'est en fait le milieu de $[BC]$. En effet, si on définit X comme l'intersection entre les droites (PQ) et (BC), alors on sait que $XP \times XQ = XB \times XC$ et, comme les droites (AD), (BE), (CF) sont concourantes (en le point de Gergonne du triangle ABC), la division (X, D, B, C) est harmonique et donc on peut en déduire d'après la relation de Mac Laurin que : $XB \times XC = XD \times XM$. On trouve donc $XP \times XQ = XD \times XM$, ce qui implique que les points P, Q, D, M sont cocycliques.
Il suffit maintenant de montrer que la médiatrice de $[DM]$ passe par T. Pour cela, nous allons montrer que le projeté orthogonal de T sur (BC) est le milieu de $[DM]$. On associe à présent à chaque point Z du plan le vecteur $\overrightarrow{OZ}$ qu'il forme avec une origine O quelconque du plan (fixée). On notera Z ce vecteur pour ne pas alourdir les notations.
Soit N_A le pôle nord de A dans ABC. Par définition, on sait que : $T = \frac{O_1+O_2}{2}$. De, plus, il est connu que O_1 est le milieu de $[II_C]$ (centre du cercle exinscrit de C) et de même O_2 est le milieu de $[II_B]$. Ainsi on trouve : $T = \frac{I+\frac{I_B+I_C}{2}}{2}$. Or on sait aussi que N_A est le milieu de $[I_BI_C]$ et donc on trouve que T est le milieu de $[IN_A]$. Le projeté orthogonal de T sur (BC) est le milieu des projetés orthogonaux de I et N_A sur (BC), à savoir D et M respectivement.
Ainsi on en déduit que le centre du cercle circonscrit à DPQ est T, qui est bien sur la droite (O_1O_2).