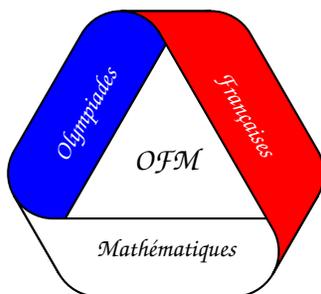


# *Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016*



## *Envoi Numéro 1*

*À renvoyer au plus tard le lundi 16 novembre*

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué :

\* des collégiens ;

\* des élèves de Seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

## Exercices du groupe B

*Exercice 1.* Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers s'écrivant sous la forme

$$n^3 + 2n + 3$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ .

*Exercice 2.* Résoudre  $x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \times 2^y$  pour  $x$  et  $y$  entiers.

*Exercice 3.* Trouver le plus petit entier positif qui ne s'écrit pas sous la forme

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$$

pour  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ .

## Exercices communs

*Exercice 4.* Trouver tous les triplets de nombres premiers  $(p, q, r)$  tels que  $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$ .

*Exercice 5.* Trouver tous les entiers strictement positifs  $n$  tels que  $2^{n-1}n + 1$  soit un carré parfait.

*Exercice 6.* Soient  $x > 1$  et  $y$  des entiers vérifiant  $2x^2 - 1 = y^{15}$ . Montrer que  $x$  est divisible par 5.

## Exercices du groupe A

*Exercice 7.* Caractériser les entiers  $n \geq 2$  tels que pour tout entier  $a$  on ait  $a^{n+1} = a \pmod{n}$ .

*Exercice 8.* Soit  $k \geq 3$  un entier. On définit la suite  $(a_n)_{n \geq k}$  par  $a_k = 2k$ , et

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1 & \text{si } \text{pgcd}(a_{n-1}, n) = 1 \\ 2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la suite  $(a_{n+1} - a_n)_{n \geq k}$  a une infinité de termes qui sont des nombres premiers.

*Exercice 9.* Soit  $t$  un entier naturel non-nul. Montrer qu'il existe un entier  $n > 1$  premier avec  $t$  tel que pour tout entier  $k \geq 1$ , l'entier  $n^k + t$  ne soit pas une puissance (c'est-à-dire ne soit pas de la forme  $m^r$  avec  $m \geq 1$  et  $r \geq 2$ ).