Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Envoi Numéro 1

À renvoyer au plus tard le lundi 16 novembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué :
* des collégiens ;
* des élèves de Seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers s'écrivant sous la forme

$$n^3 + 2n + 3$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Résoudre $x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \times 2^y$ pour x et y entiers.

Exercice 3. Trouver le plus petit entier positif qui ne s'écrit pas sous la forme

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

Exercices communs

Exercice 4. Trouver tous les triplets de nombres premiers (p, q, r) tels que $(p+1)(q+2)(r+3) = 4pqr$.

Exercice 5. Trouver tous les entiers strictement positifs n tels que $2^{n-1}n + 1$ soit un carré parfait.

Exercice 6. Soient $x > 1$ et y des entiers vérifiant $2x^2 - 1 = y^{15}$. Montrer que x est divisible par 5.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Caractériser les entiers $n \geqslant 2$ tels que pour tout entier a on ait $a^{n+1} = a \pmod{n}$.

Exercice 8. Soit $k \geqslant 3$ un entier. On définit la suite $(a_n)_{n \geqslant k}$ par $a_k = 2k$, et

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1 & \text{si } \mathrm{pgcd}(a_{n-1}, n) = 1 \\ 2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n \geqslant k}$ a une infinité de termes qui sont des nombres premiers.

Exercice 9. Soit t un entier naturel non-nul. Montrer qu'il existe un entier $n > 1$ premier avec t tel que pour tout entier $k \geqslant 1$, l'entier $n^k + t$ ne soit pas une puissance (c'est-à-dire ne soit pas de la forme m^r avec $m \geqslant 1$ et $r \geqslant 2$).