Olympiades Françaises de Mathématiques - Animath
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris
ofm@animath.fr

Test de sélection pour le Romanian Master of Mathematics
Mercredi 19 novembre 2014
Durée : 4 heures

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1. Soit $n > 1$ un entier. On veut colorier les n^2 cases d'un tableau $n \times n$ de sorte que n de ces cases soient vertes, n de ces cases soient bleues, et toutes les autres soient rouges.

On désigne par A le nombre de tels coloriages pour lesquels il y a exactement une case verte dans chaque ligne et exactement une case bleue dans chaque colonne.

On désigne par B le nombre de tels coloriages pour lesquels il y a exactement une case verte dans chaque ligne et exactement une case bleue dans chaque ligne.

Lequel des deux nombres A et B est le plus grand ?

Exercice 2. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe. On suppose que ses diagonales (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en un point M et que les centres des cercles circonscrits aux triangles MAB, MBC, MCD, MDE, MEF et MFA sont cocycliques. Montrer que les quadrilatères $ABDE$, $BCEF$ et $CDFA$ ont la même aire.

Exercice 3. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Prouver que parmi les nombres $2, 3, \cdots, p-2$, il existe au moins deux nombres premiers distincts, q et r, tels que $q^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ et $r^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.