Romanian Master of Mathematics : Solutions

Solution du problème 1. On appelle **LC-coloriage** un coloriage avec une case verte par ligne et une case bleue par colonne, et **LL-coloriage** un coloriage avec une case verte et une case bleue par ligne.

Pour choisir un LC-coloriage ou un LL-coloriage, on peut commencer par positionner les n cases vertes. Si on souhaite un LL-coloriage, il nous reste à positionner les n cases bleues, ce que l'on a $(n-1)^n$ manières de faire : pour chacune des n lignes, il nous reste $n-1$ cases vacantes.

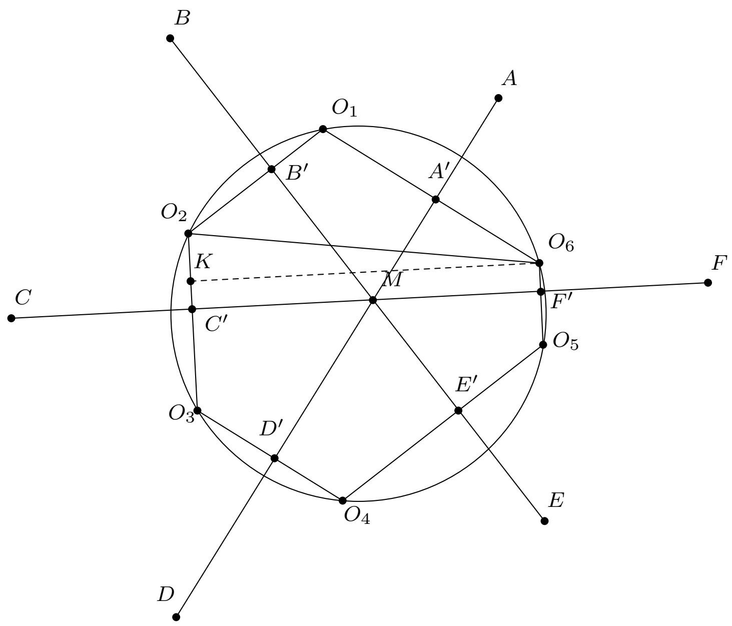
En revanche, si on souhaite un LC-coloriage, notons v_i le nombre de cases coloriées en vert sur la i-ème colonne. On a $n - v_i$ manières de choisir quelle case vacante de la i-ème colonne on va colorier en bleu, soit $\prod_{i=1}^{n}(n-v_i)$ manières de choisir l'ensemble des cases bleues. L'inégalité arithmético-géométrique montre que

$$\prod_{i=1}^{n}(n-v_i) \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} n - v_i}{n}\right)^n = (n-1)^n,$$

avec égalité si et seulement si $v_1 = \ldots = v_n = 1$ (ce qui n'arrivera pas tout le temps, par exemple si on a mis toutes nos cases vertes sur la première colonne).

Le positionnement des cases vertes étant décidé, il nous restait donc autant au moins de façons de construire un LL-coloriage que de construire un LC-coloriage, voire strictement plus dans certains cas. Il y a donc strictement plus de LL-coloriages que de LC-coloriages, ce qui signifie que $B > A$.

Solution du problème 2.



L'aire de $ABDE$ étant égale à $\frac{1}{2} \times AD \cdot BE \cdot \sin \widehat{AMB}$, on doit montrer que

$$AD \times BE \times \sin \widehat{AMB} = BE \times CF \times \sin \widehat{BMC} = CF \times AD \times \sin \widehat{CMD}.$$

Par permutation circulaire, il suffit de montrer la première égalité, à savoir

$$AD \times \sin \widehat{AMB} = CF \times \sin \widehat{BMC}.$$

Notons $O_1, O_2, \ldots, O_6$ les centres des cercles circonscrits à MAB, MBC,..., MFA, et $A', B', \ldots, F'$ les milieux de $[MA], [MB], \ldots, [MF]$.

Comme O_1 est sur la médiatrice de $[AM]$, on a $(O_1A') \perp (AM)$ et de même $(O_6A') \perp (MA)$, donc A', O_1, O_6 sont alignés sur une droite perpendiculaire à (AM). Par conséquent, A est le symétrique de M par rapport à la droite (O_1O_6) ; on a des assertions analogues pour les points $B, C, \ldots F$.

Comme (O_6O_1) et (O_3O_4) sont perpendiculaires à $(AM) = (DM)$, elles sont parallèles entre elles. De même, on a $(O_iO_{i+1}) \mathbin{/\!/} (O_{i+3}O_{i+4})$ pour tout i, en convenant que $O_7 = O_1$, $O_8 = O_2$, etc. Comme $O_iO_{i+1}O_{i+3}O_{i+4}$ est un trapèze inscriptible, il est isocèle, donc $O_iO_{i+3} = O_{i+1}O_{i+4}$. On en déduit qu'il existe une constante k telle que $O_iO_{i+3} = k$ pour tout i.

Notons R le rayon du cercle passant par $O_1, \ldots, O_6$. Soit K le projeté orthogonal de O_6 sur (O_2O_3). On a

$$\begin{aligned}
\frac{C'F'}{O_2O_6} &= \frac{KO_6}{O_2O_6} \\
&= \sin \widehat{KO_2O_6} = \sin \widehat{O_3O_2O_6} \qquad \text{car } O_2KO_6 \text{ est un triangle rectangle} \\
&= \frac{O_3O_6}{2R} \qquad \text{d'après la loi des sinus} \\
&= \frac{k}{2R}.
\end{aligned}$$

Or, $O_2O_6 = 2R \sin \widehat{O_2O_1O_6} = 2R \sin \widehat{AMB}$ (car les côtés des angles $\widehat{O_2O_1O_6}$ et $\widehat{AMB}$ sont deux à deux perpendiculaires), donc $C'F' = k \sin \widehat{AMB}$, d'où $\dfrac{CF}{\sin \widehat{AMB}} = 2k$.

On prouve de même $\dfrac{AD}{\sin \widehat{BMC}} = 2k$, donc $\dfrac{CF}{\sin \widehat{AMB}} = \dfrac{AD}{\sin \widehat{BMC}}$.

Solution du problème 3. Tout d'abord, le problème est évident si $p = 5$, car alors $2^{p-1} \equiv 16 \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ et $3^{p-1} \equiv 6 \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. On suppose donc désormais que $p \geq 7$.

Notons K l'ensemble $\{n \mid n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}\}$. Alors K est stable par produit. De plus, si $a \in K$ (donc $a \not\equiv 0 \pmod{p}$) et si k est un entier, alors

$$(a + kp)^{p-1} \equiv a^{p-1} + (p-1)a^{p-2}kp \equiv 1 - kpa^{p-2} \pmod{p^2}.$$

Ainsi, $a + kp \in K$ si et seulement si $k \in p\mathbb{Z}$.

Puisque $\{-1, 1\} \subseteq K$, alors $\{p-1, p+1\} \cap K = \emptyset$: il existe donc deux nombres premiers q et r tels que q divise $p-1$, r divise $p+1$ et $\{p, q\} \cap K = \emptyset$. En outre, puisque $p-1$ et $p+1$ sont pairs donc composés, on a $1 \leq q \leq \frac{p-1}{2} < p$ et $1 \leq r \leq \frac{p+1}{2} < p$.

Si $q \neq r$, on a donc trouvé deux nombres premiers distincts dans l'ensemble $\{1, \ldots, p-1\} \setminus K$. En revanche, si $q = r$, alors q divise $\mathrm{PGCD}(p-1, p+1) = 2$, donc $q = 2 \notin K$.

Le seul cas à traiter est celui où tout nombre premier impair de l'intervalle $\{1, \ldots, p-1\}$ appartient à K, c'est-à-dire celui où $\{1, \ldots, p-1\} \setminus 2\mathbb{Z} \subseteq K$. On pose alors $\theta = 1$ si $p \equiv 1 \pmod{3}$, ou $\theta = 5$ si $p \equiv 2 \pmod{3}$. Puisque $\theta \in K$ et que $2 \notin p\mathbb{Z}$, on sait que $2p + \theta \notin K$. Cependant, on sait également que $\left\{3, \frac{2p+\theta}{3}\right\} \subseteq \{1, \ldots, p-1\} \setminus 2\mathbb{Z} \subseteq K$, donc que $2p + \theta \in K$.

Cette contradiction montre que K devait nécessairement contenir deux nombres premiers q et r tels que $1 < q < r < p$.