OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE MARS

MERCREDI 25 MARS 2015

DURÉE : 4 HEURES

Ne pas diffuser ce sujet sur internet

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices pour les candidats à la compétition JBMO

Exercice 1. 2014 personnes sont alignées. Chacune d'elles ment à chaque fois qu'elle parle, ou ne dit que la vérité. Il se trouve que chacune des 2014 personnes affirme "il y a plus de menteurs à ma gauche que de personnes qui disent la vérité à ma droite".
Combien peut-il y avoir de menteurs dans cette file ?

Exercice 2. Soit ABC un triangle. On note D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$. Soient M et N deux points de $[AD]$ tels que $\widehat{NBA} = \widehat{CBM}$. Soit E le second point d'intersection de la droite (BM) avec le cercle circonscrit au triangle ACM, et soit F le second point d'intersection de la droite (CN) avec le cercle circonscrit au triangle ABN. Montrer que A, E, F sont alignés.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers naturels m et n vérifiant l'équation $2^n = 3^m + 23$.

Exercice commun

Exercice 4. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy,$$

pour tous réels x et y.

Exercices pour les candidats aux compétitions OIM, BxMO et MYMC

Exercice 5. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note A_n l'ensemble

$$A_n = \{2^n - 2^k \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Déterminer le plus grand entier strictement positif qui ne peut pas s'écrire comme somme d'un ou plusieurs éléments (non nécessairement distincts) de A_n.

Exercice 6. Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB > BC$. On note Ω le cercle circonscrit et O son centre. La bissectrice de $\widehat{ABC}$ recoupe Ω en $M \neq B$. Soit Γ le cercle de diamètre $[BM]$. Les bissectrices de $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ coupent Γ en P et Q respectivement. Soit R le point de la droite (PQ) tel que $BR = MR$. Montrer que $(BR) \,//\, (AC)$.
(Dans l'exercice, on considère que les bissectrices sont des demi-droites.)