OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES - ANIMATH
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris
ofm@animath.fr

TEST FINAL DU MERCREDI 13 MAI 2015
DURÉE : 4 HEURES

Ne pas diffuser ce sujet sur internet

Instructions

- **Respectez la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices.Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices pour les candidats à la compétition JBMO

Exercice 4. Soit ABC un triangle ayant tous ses angles aigus tel que $AB < AC < BC$. On note Γ le cercle circonscrit. Soient D et E les points de Γ diamétralement opposés aux points B et C. Le cercle de centre A et de rayon AE coupe le segment $[AC]$ au point K, et le cercle de centre A et de rayon AD coupe la droite (BA) au point L de sorte que A se situe entre B et L. Montrer que les droites (EK) et (DL) se coupent en un point de Γ.

Exercice 5. Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs tels que $a+b+c=1$. Montrer que

$$\frac{7+2b}{1+a}+\frac{7+2c}{1+b}+\frac{7+2a}{1+c}\geqslant\frac{69}{4}.$$

Exercice 6. Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs vérifiant $x^2 = y^2(x+y^4+2y^2)$.

Exercice commun : candidats JBMO, OIM et MYMC

Exercice 7. On considère n points à l'intérieur d'un rectangle R tels que deux quelconques de ces points ne sont pas sur une même droite parallèle à l'un des côtés de R. Le rectangle R est découpé en plusieurs petits rectangles dont les côtés sont parallèles à ceux de R, de sorte qu'aucun des points donnés ne soit situé à l'intérieur de ces petits rectangles. Montrer que le nombre de petits rectangles est supérieur ou égal à $n+1$.

Exercices pour les candidats aux compétitions OIM et MYMC

Exercice 8. Etant donné un nombre réel strictement positif t déterminer tous les ensembles A de nombres réels contenant t tels qu'il existe un ensemble B de nombres réels, dépendant de A et possédant au moins 4 éléments, de sorte que l'ensemble $AB = \{ab \ : \ a \in A,\ b \in B\}$ forme une progression arithmétique finie.

Rappel : une progression arithmétique finie est un ensemble $\{c_1 < c_2 < \cdots < c_k\}$ tel que $c_2 - c_1 = c_3 - c_2 = \cdots = c_k - c_{k-1}$.

Exercice 9. Déterminer tous les triplets (p, x, y) consistant en un nombre premier p, et deux entiers strictement positifs x, y tels que $x^{p-1}+y$ et $x+y^{p-1}$ soient des puissances de p.