

TEST FINAL DU MARDI 12 MAI 2015 (DURÉE : 4 HEURES)
Ne pas diffuser ce sujet sur internet

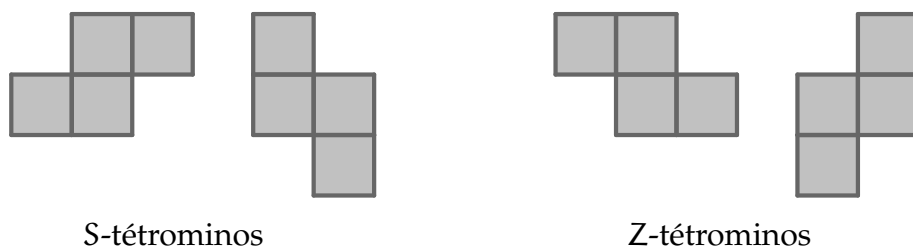
Instructions

- ▷ Respectez la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1. Trouver tous les polynômes f à coefficients entiers tels que pour tout entier $n > 0$, $f(n)$ divise $3^n - 1$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, A' le projeté orthogonal de A sur (BC) , et X un point de la demi-droite $[AA')$. La bissectrice de l'angle \widehat{BAC} recoupe le cercle circonscrit à ABC en D . Soit L le milieu de $[DX]$. La droite passant par O et parallèle à (AD) coupe la droite (DX) en N . Montrer que $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$.

Exercice 3. On considère les quatre types de tétrominos suivants :



Montrer que si un ensemble de cases d'un échiquier $n \times n$ peut être pavé par des S-tétrominos, alors quelle que soit la manière dont on le pave avec des S-tétrominos et des Z-tétrominos, le nombre de Z-tétrominos est toujours pair.