OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE JANVIER

MERCREDI 7 JANVIER 2015

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Le groupe B est constitué des élèves nés en 2000 ou après, avec les exceptions suivantes :
  * les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
  * les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2013-2014 sont dans le groupe A.
    Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé « commun » est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices du groupe B

Exercice 1. a) Prouver que, pour tous réels strictement positifs a, b, k tels que $a < b$, on a

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}.$$

b) Prouver que $\frac{1}{100} + \frac{4}{101} + \frac{7}{102} + \frac{10}{103} + \cdots + \frac{148}{149} > 25.$

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle, D sur (BC) tel que $AD = AB$ et D différent de B. Soit Γ le cercle circonscrit à ABC, Δ la tangente à Γ en C, E l'intersection de (AD) et Δ.
Montrer que $CD^2 = AD.DE - BD.DC$.

Exercice 3. Soit n un entier strictement positif tel que $n(n + 2015)$ est le carré d'un entier.
a) Prouver que n n'est pas un nombre premier.
b) Donner un exemple d'un tel entier n.

Exercice commun

Exercice 4. On veut colorier les parties à trois éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, de sorte que si deux de ces parties n'ont pas d'élément en commun alors elles soient de couleurs différentes.
Quel est le nombre minimum de couleurs pour réaliser cet objectif ?

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $(AB)//(CD)$. Deux cercles ω_1 et ω_2 sont situés à l'intérieur du trapèze de sorte que ω_1 est tangent à $(DA), (AB), (BC)$ et ω_2 est tangent à $(BC), (CD), (DA)$. Soit d_1 une droite passant par A, autre que (AD), tangente à ω_2. Soit d_2 une droite passant par C, autre que (CB), tangente à ω_1. Montrer que $d_1 // d_2$.

Exercice 6. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs. Pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, on note

$$m_k = \max_{1 \leqslant \ell \leqslant k} \frac{a_{k-\ell+1} + a_{k-\ell+2} + \cdots + a_k}{\ell}.$$

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, le nombre d'entiers k tel que $m_k > \alpha$ est strictement plus petit que $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\alpha}$.

Exercice 7. Soit a, b, c, n des entiers, avec $n \geqslant 2$. Soit p un nombre premier qui divise $a^2 + ab + b^2$ et $a^n + b^n + c^n$, mais qui ne divise pas $a + b + c$.
Prouver que n et $p - 1$ ne sont pas premiers entre eux.