OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE JANVIER
MERCREDI 7 JANVIER 2015
CORRIGÉ

Exercice 1.

a) Prouver que, pour tous réels strictement positifs a, b, k tels que $a < b$, on a

$$\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}.$$

b) Prouver que

$$\frac{1}{100} + \frac{4}{101} + \frac{7}{102} + \frac{10}{103} + \cdots + \frac{148}{149} > 25.$$

Solution de l'exercice 1

a) On a $ak < bk$, donc $ab + ak < ab + bk$. Ceci s'écrit $a(b+k) < b(a+k)$, ou encore $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$.

b) Soit $A = \frac{1}{100} + \frac{4}{101} + \frac{7}{102} + \frac{10}{103} + \cdots + \frac{148}{149}$. En appliquant ce qui précède, on en déduit

$$A > \frac{1}{100} + \frac{3}{100} + \frac{5}{100} + \frac{7}{100} + \cdots + \frac{99}{100} = \frac{50 + 2(0+1+2+3+\cdots+49)}{100}.$$

Il suffit donc de vérifier que ce dernier terme vaut 25, soit en calculant à la main le numérateur, soit en utilisant la formule

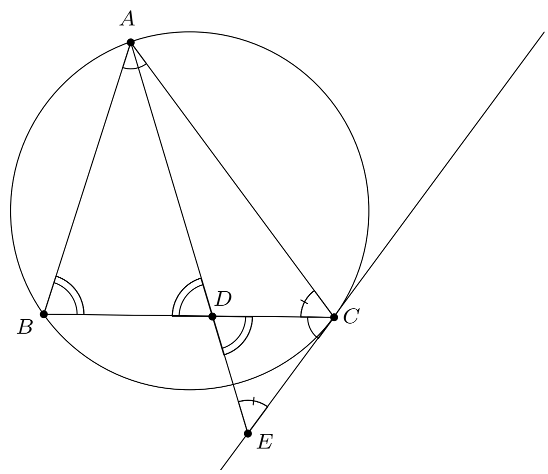
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

qui donne

$$\frac{50 + 2(0+1+2+3+\cdots+49)}{100} = \frac{50 + 49 \times 50}{100} = 25.$$

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle tel que $AC > AB$, D sur (BC) tel que $AD = AB$ et D différent de B. Soit Γ le cercle circonscrit à ABC, Δ la tangente à Γ en C, E l'intersection de (AD) et Δ.
Montrer que $CD^2 = AD.DE - BD.DC$.

Solution de l'exercice 2



On a $\widehat{EDC} = \widehat{ADB} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{DCE} = \widehat{BAC}$ donc ABC et CDE sont semblables. On en déduit que $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{BC}{DE}$, donc

$$AD.DE - BD.DC = AB.DE - BD.DC = BC.CD - BD.CD = (BC - BD)CD = CD^2.$$

Exercice 3. Soit n un entier strictement positif tel que $n(n+2015)$ est le carré d'un entier.

a) Prouver que n n'est pas un nombre premier.

b) Donner un exemple d'un tel entier n.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

a) Supposons que n est premier et qu'il existe un entier m vérifiant $n(n+2015) = m^2$. Alors n divise m^2, donc n divise m. On peut donc écrire $m = nr$. Il vient $n(n+2015) = n^2r^2$, puis $n + 2015 = nr^2$. Par conséquent, $2015 = nr^2 - n = n(r^2 - 1)$ est divisible par n.

   Or, $2015 = 5 \times 13 \times 31$, donc n est l'un des entiers $5, 13, 31$.

   Si $n = 5$ alors $r^2 - 1 = 13 \times 31 = 403$, ce qui est impossible car 404 n'est pas un carré parfait. De même, $5 \times 31 + 1 = 156$ et $5 \times 13 + 1 = 66$ ne sont pas des carrés parfaits, ce qui exclut les cas $n = 13$ et $n = 31$.

b) On cherche n et m entiers tels que

$$(2m)^2 = 4n(n+2015) = (2n)^2 + 2 \times (2n) \times 2015 = (2n+2015)^2 - 2015^2.$$

   Ceci équivaut à $2015^2 = (2n+2015)^2 - (2m)^2 = (2n+2015+2m)(2n+2015-2m)$.

   Soient $a = 2015 \times 5$ et $b = \dfrac{2015}{5}$. Il suffit donc que

$$2n + 2015 + 2m = a \text{ et } 2n + 2015 - 2m = b.$$

   En additionnant ces égalités, on trouve que $4n + 4030 = a + b = 403 \times 25 + 403$, donc $\underline{n = 1612}$, et en soustrayant on obtient $4m = a - b = 403 \times 24$ donc $m = 403 \times 6$.

Exercice 4. On veut colorier les parties à trois éléments de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, de sorte que si deux de ces parties n'ont pas d'élément en commun alors elles soient de couleurs différentes. Quel est le nombre minimum de couleurs pour réaliser cet objectif ?

Solution de l'exercice 4

Considérons la suite de parties $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,2,7\}$, $\{3,4,6\}$, $\{1,5,7\}$, $\{2,3,6\}$, $\{4,5,7\}$, $\{1,2,3\}$.

Chaque partie doit avoir une couleur différente de la suivante, donc déjà il y a au moins deux couleurs. S'il n'y avait qu'exactement deux couleurs, alors les couleurs devraient alterner, ce qui est impossible car la dernière partie est la même que la première et devrait être de couleur opposée.

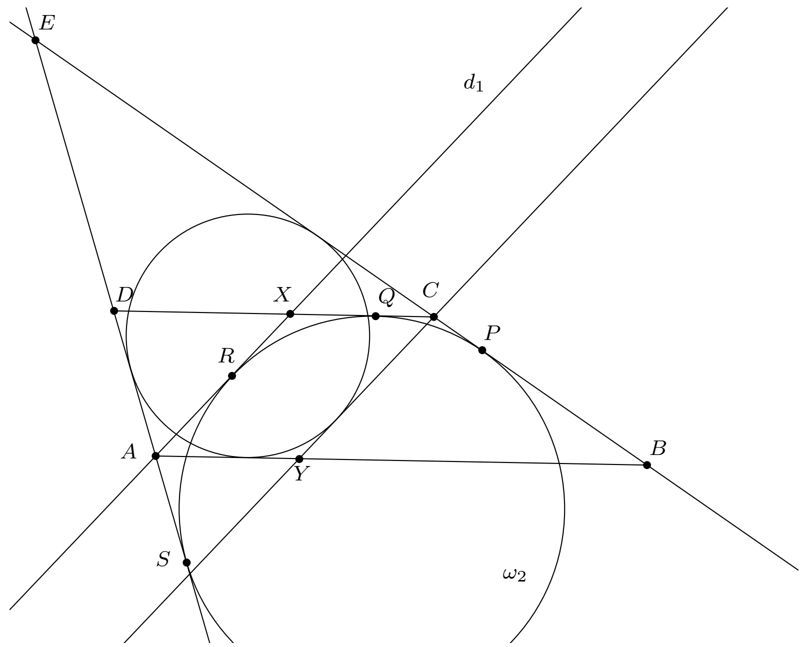
Réciproquement, montrons que trois couleurs suffisent :

- On colorie en bleu les parties qui contiennent au moins deux éléments parmi $1,2,3$.
- On colorie en vert les parties non coloriées en bleu et qui contiennent au moins deux éléments parmi $4,5,6$.
- On colorie en rouge les parties non coloriées en bleu ou en vert.

Il est évident que deux parties bleues ont un élément en commun parmi $1,2,3$; de même, deux parties vertes ont un élément en commun parmi $4,5,6$. Enfin, toute partie rouge contient trois éléments, dont contient nécessairement l'élément 7 : deux parties rouges ont donc également un élément en commun.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un trapèze tel que $(AB) /\!/ (CD)$. Deux cercles ω_1 et ω_2 sont situés à l'intérieur du trapèze de sorte que ω_1 est tangent à $(DA),(AB),(BC)$ et ω_2 est tangent à $(BC),(CD),(DA)$. Soit d_1 une droite passant par A, autre que (AD), tangente à ω_2. Soit d_2 une droite passant par C, autre que (CB), tangente à ω_1. Montrer que $d_1 /\!/ d_2$.

Solution de l'exercice 5 Par continuité, on peut supposer que $AB \neq CD$. De plus, quitte à échanger A et B avec C et D, ainsi que ω_1 et ω_2, on peut supposer $AB > CD$.

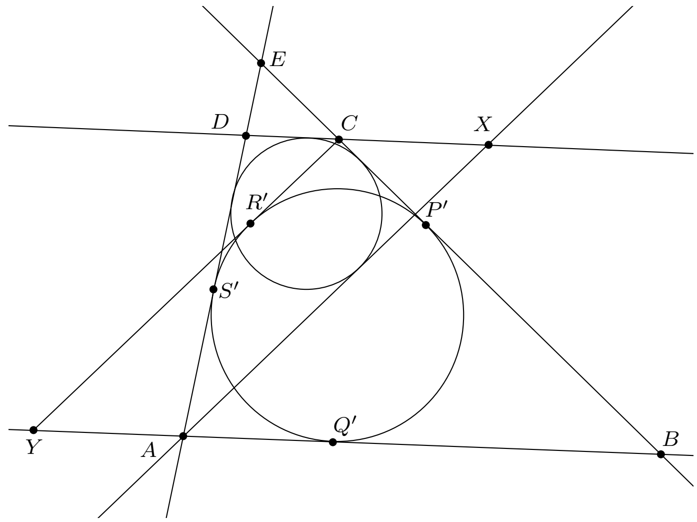


Soit E l'intersection de (AD) et (BC). Supposons que (CD) coupe ω_1.
On note P,Q,R,S les points de contact de ω_2 avec $(BC),(CD),d_1,(DA)$. Soit X l'intersection de (CD) avec d_1. Soit d_2' la parallèle à d_1 passant par C et $Y = (AB) \cap d_2'$. On oriente les droites de sorte que les mesures algébriques $\overline{EA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AX}$, $\overline{YC}$ soient positives.

$$\begin{aligned}
(EA+YC)-(CE+AY) &= (\overline{EA}+\overline{YC})-(\overline{CE}+\overline{AY}) \\
&= \overline{ES}+\overline{SA}+\overline{AX}-\overline{CP}-\overline{PE}-\overline{XC} \\
&= \overline{SA}+\overline{AX}-\overline{CP}-\overline{XC} \quad \text{car } \overline{ES}=\overline{PE} \\
&= \overline{RA}+\overline{AX}-\overline{XQ}=\overline{RX}-\overline{XQ}=0
\end{aligned}$$

donc $EAYC$ est circonscriptible. Il vient $d_2' = (CY) = d_2$, donc $d_1 /\!/ d_2$.

Si maintenant (CD) ne coupe pas ω_1, on définit cette fois d_1' la parallèle à d_2 passant par A, $X = (CD) \cap d_1'$ et $Y = (AB) \cap d_2$. On montre comme ci-dessus que $EAXC$ est circonscriptible (la preuve est laissée au lecteur).


E
D
C
X
R′
P′
S′
Q′
Y
A
B

Exercice 6. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs. Pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, on note

$$m_k = \max_{1 \leq \ell \leq k} \frac{a_{k-\ell+1} + a_{k-\ell+2} + \cdots + a_k}{\ell}.$$

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, le nombre d'entiers k tel que $m_k > \alpha$ est strictement plus petit que $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\alpha}$.

Solution de l'exercice 6

Soit k_1 le plus grand entier k tel que $m_k > \alpha$. Il existe ℓ_1 tel que $a_{k_1-\ell_1+1} + \cdots + a_{k_1} > \ell_1 \alpha$.

Soit k_2 le plus grand entier $\leqslant k_1 - \ell_1$ tel que $m_k > \alpha$. Il existe ℓ_2 tel que $a_{k_2-\ell_2+1} + \cdots + a_{k_2} > \ell_2 \alpha$.

$\ldots$

On construit ainsi une suite finie $k_1 > k_2 > \cdots > k_r$ telle que tout entier k vérifiant $m_k > \alpha$ se trouve dans l'un des intervalles $I_j = [\![k_j - \ell_j + 1, k_j]\!]$. De plus, ces intervalles sont deux à deux disjoints.

Par conséquent, le nombre d'entiers k tels que $m_k > \alpha$ est inférieur ou égal à la somme des longueurs des intervalles, à savoir $\ell_1 + \cdots + \ell_r$.

Or, $\sum_{j=1}^{r} \ell_j < \dfrac{1}{\alpha} \sum_j (a_{k_j-\ell_j+1} + \cdots + a_{k_j}) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}(a_1 + \cdots + a_n)$. CQFD.

Exercice 7. Soit a, b, c, n des entiers, avec $n \geq 2$. Soit p un nombre premier qui divise $a^2 + ab + b^2$ et $a^n + b^n + c^n$, mais qui ne divise pas $a + b + c$.
Prouver que n et $p - 1$ ne sont pas premiers entre eux.

Solution de l'exercice 7
Si p divise a et b, alors p divise c^n donc p divise c, ce qui contredit la dernière assertion. Donc, quitte à échanger a et b, on suppose que p ne divise pas b. Quitte à multiplier a, b, c par un inverse de b modulo p, on peut supposer que $b = 1$ et donc

$$p \mid a^2 + a + 1, \quad p \mid a^n + 1 + c^n, \quad p \nmid a + 1 + c.$$

Comme $a^2 + a + 1$ est impair, p l'est aussi.
Comme p divise $(a^2 + a + 1)(a - 1) = a^3 - 1$, l'ordre de a modulo p est 1 ou 3.
Premier cas : $a \equiv 1 \pmod p$. Alors $p = 3$, donc $c^n \equiv -1 - a^n \equiv 1 \pmod 3$.
En particulier, c est inversible modulo 3, donc $c \equiv \pm 1 \pmod 3$. Comme $p \nmid a + 1 + c$, on a nécessairement $c \equiv -1 \pmod 3$. Enfin, comme $c^n \equiv 1 \pmod 3$, l'entier n est pair donc n'est pas premier avec $p - 1$.
Deuxième cas : l'ordre de a modulo p est 3. Comme par ailleurs l'ordre de a modulo p divise $p - 1$ en vertu du petit théorème de Fermat, on a $3 \mid p - 1$.
Supposons que n est premier avec $p - 1$. Alors $x \mapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur lui-même :

- si $n \equiv 1 \pmod 3$ alors $c^n \equiv -a^n - 1 \equiv -a - 1 \equiv a^2 \equiv (a^2)^n \pmod p$ donc par bijectivité de $x \mapsto x^n$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a $c \equiv a^2 \equiv -a - 1 \pmod p$: contradiction !
- si $n \equiv 2 \pmod 3$ alors $c^n \equiv -a^n - 1 \equiv -a^2 - 1 \equiv a \equiv (a^2)^n \pmod p$ donc par bijectivité de $x \mapsto x^n$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a $c \equiv a^2 \equiv -a - 1 \pmod p$: contradiction !

On en déduit que $n \equiv 0 \pmod 3$, donc 3 est un diviseur commun de n et de $p - 1$.