OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES - ANIMATH
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris
ofm@animath.fr

TEST DU GROUPE A ET DES CANDIDATES À L'ÉPREUVE EGMO

VENDREDI 20 FÉVRIER 2015

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1. Dans un pays, se trouvent 100 villes. Chacune de ces villes est reliée à exactement trois autres villes par des routes directes dans les deux sens. Prouver qu'il existe une ville A à partir de laquelle on peut aller de ville en ville et revenir en A, sans jamais passer deux fois par une même route, et en utilisant un nombre total de routes qui n'est pas divisible par 3 (il n'est pas demandé que toutes les villes du pays soient visitées au cours de ce voyage).

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que, pour tous p premier et u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $p \mid uv - 1$ on ait : $p \mid P(u)P(v) - 1$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle non isocèle en A et Γ son cercle circonscrit. Soit N le milieu de l'arc de Γ entre B et C qui contient A. Soient I le centre du cercle inscrit à ABC, J le centre du cercle A-exinscrit à ABC et K le point d'intersection de (BC) avec la bissectrice extérieure de $\angle BAC$.

Montrer que $(JN) \perp (IK)$.

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes P et Q à coefficients entiers tels que, si l'on définit la suite (x_n) par $x_0 = 2015$, $x_{2n+1} = P(x_{2n})$ et $x_{2n+2} = Q(x_{2n+1})$ pour tout $n \geqslant 0$, alors tout entier $m > 0$ divise au moins un terme non nul de la suite.