OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES - ANIMATH
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris
ofm@animath.fr

TEST DU GROUPE B ET DES CANDIDATES À L'ÉPREUVE EGMO
JEUDI 19 FÉVRIER 2015
DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1. Déterminer tous les nombres réels x, y, z satisfaisant le système d'équations suivant : $x = \sqrt{2y+3}$, $y = \sqrt{2z+3}$, $z = \sqrt{2x+3}$.

Exercice 2. Soient n et k des entiers strictement positifs. Il y a nk objets (de même taille) et k boîtes qui peuvent contenir chacune n objets. Chaque objet est colorié en une couleur parmi k couleurs possibles. Montrer qu'il est possible de ranger les objets dans les boîtes de sorte que chaque boîte contienne des objets d'au plus 2 couleurs différentes.

Exercice 3. On dit qu'un entier strictement positif n est *amusant* si pour tout diviseur strictement positif d de n, l'entier $d + 2$ est premier. Déterminer tous les entiers amusants dont le nombre de diviseurs est maximum.

Exercice 4. Soit ABC un triangle non isocèle. Soit ω le cercle inscrit et I son centre. On note M, N, P les points de contact de ω avec les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Soit J le point d'intersection entre (MN) et (IC). La droite (PJ) recoupe ω en K. Montrer que

a) $CKIP$ est cyclique ;
b) (CI) est la bissectrice de $\widehat{PCK}$.