OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES - ANIMATH
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris
ofm@animath.fr

TEST DU GROUPE B ET DES CANDIDATES À L'ÉPREUVE EGMO
JEUDI 19 FÉVRIER 2015
CORRIGÉ

Exercice 1. Déterminer tous les nombres réels x, y, z satisfaisant le système d'équations suivant : $x = \sqrt{2y+3}$, $y = \sqrt{2z+3}$, $z = \sqrt{2x+3}$.

Solution de l'exercice 1 Il est évident que les nombres x, y, z doivent être strictement positifs. Les deux premières équations donnent $x^2 = 2y+3$ et $y^2 = 2z+3$. En les soustrayant, on obtient $x^2 - y^2 = 2(y-z)$. On en déduit que si $x \leqslant y$ alors $y \leqslant z$, et de même si $y \leqslant z$ alors $z \leqslant x$. Donc si $x \leqslant y$, on a $x \leqslant y \leqslant z \leqslant x$, ce qui impose que $x = y = z$.

On montre de même que si $x \geqslant y$ alors $x = y = z$. Donc dans tous les cas, x, y, z sont égaux, et leur valeur commune satisfait l'équation $x^2 = 2x+3$, qui s'écrit encore $(x-3)(x+1) = 0$. Or, x est strictement positif, donc nécessairement $x = y = z = 3$. Réciproquement, on vérifie immédiatement que $x = y = z = 3$ est bien solution du système.

Exercice 2. Soient n et k des entiers strictement positifs. Il y a nk objets (de même taille) et k boîtes qui peuvent contenir chacune n objets. Chaque objet est colorié en une couleur parmi k couleurs possibles. Montrer qu'il est possible de ranger les objets dans les boîtes de sorte que chaque boîte contienne des objets d'au plus 2 couleurs différentes.

Solution de l'exercice 2 On le montre par récurrence sur k. Si $k = 1$ c'est évident. Supposons la propriété vraie pour tous les entiers $< k$.

Si l'une des couleurs c est prise exactement n fois, on range tous les objets dont la couleur est c dans la dernière boîte. L'hypothèse de récurrence permet de ranger les $n(k-1)$ objets restants dans les $k-1$ premières boîtes de sorte que chaque boîte contienne des objets d'au plus 2 couleurs différentes.

Supposons donc qu'aucune couleur ne soit prise exactement n fois. Si toutes les couleurs sont prises $\leqslant n-1$ fois, alors il y a au plus $(n-1)k$ objets au total, ce qui contredit l'hypothèse. Donc l'une des couleurs c_1 est prise $\geqslant n+1$ fois. De même, l'une des couleurs c_2 est prise $\leqslant n-1$ fois.

On place alors tous les objets de couleur c_2 dans la dernière boîte. On complète cette boîte avec des objets de couleur c_1. L'hypothèse de récurrence permet de ranger les $n(k-1)$ objets restants dans les $k-1$ premières boîtes de sorte que chaque boîte contienne des objets d'au plus 2 couleurs différentes.

Exercice 3. On dit qu'un entier strictement positif n est *amusant* si pour tout diviseur strictement positif d de n, l'entier $d+2$ est premier. Déterminer tous les entiers amusants dont le nombre de diviseurs est maximum.

Solution de l'exercice 3 Soit n un entier amusant et p un diviseur premier de n. Alors p est impair, puisque $p+2$ est premier.

Supposons que $p \geqslant 5$. Alors $p+2$ est premier, et $p+2>3$, donc $p+2$ n'est pas divisible par 3. On en déduit que p n'est pas congru à 1 modulo 3. Il est clair que p n'est pas congru à 0 modulo 3, donc $p \equiv 2 \pmod 3$. Supposons que $p^2 \mid n$. Alors $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, donc $p^2+2 \equiv 0 \pmod 3$. De plus, p^2+2 est premier, donc $p^2+2=3$, ce qui est impossible.

On déduit de ce qui précède que si $p \geqslant 5$ est un diviseur premier de n, alors p^2 ne divise pas n.

De même, si p_1 et p_2 sont des diviseurs premiers distincts $\geqslant 5$ de n, alors p_1p_2 divise n, donc p_1p_2+2 est divisible par 3, ce qui est impossible.

Par conséquent, tout entier amusant n est de la forme $n=3^k$ ou bien 3^kp où p est premier.

On vérifie que $3+2$, 3^2+2, 3^3+2 et 3^4+2 sont premiers mais 3^5+2 ne l'est pas, donc $k \leqslant 4$. Les entiers amusants de la forme 3^k ont donc au plus 5 diviseurs.

Si $n = 3^4 \times 5 = 405$, alors $n+2$ n'est pas premier donc n n'est pas amusant.

Si $n=3^kp$ avec $p \geqslant 7$ premier, et $k \geqslant 3$, alors les nombres $p, 3p, 9p, 27p$ sont des diviseurs de n congrus à $p, 3p, 4p, 2p$ modulo 5. Aucun n'est congru à 0 modulo 5, et les congruences de ces quatre nombres modulo 5 sont deux à deux distinctes, donc à l'ordre près valent $1, 2, 3, 4$. On en déduit qu'il existe un diviseur $d \geqslant 7$ de n tel que $d \equiv 3 \pmod 5$. On a donc $d+2>5$ et $5 \mid d$, ce qui entraîne que d n'est pas premier.

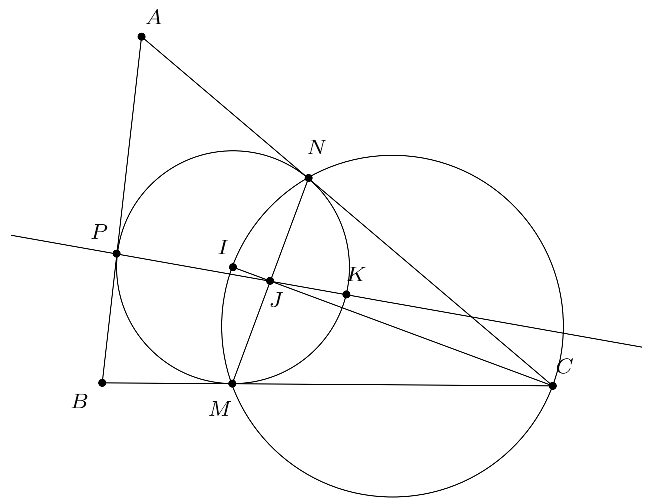
On déduit de ce qui précède que les entiers amusants de la forme 3^kp vérifient $k \leqslant 2$ ou bien ($k \leqslant 3$ et $p=5$), donc ont au plus 8 diviseurs, avec égalité seulement lorsque $k=3$ et $p=5$. Réciproquement, on vérifie que $3^3 \times 5$ est amusant, donc l'unique entier ammusant ayant un nombre maximal de diviseurs est $3^3 \times 5 = 135$.

Exercice 4. Soit ABC un triangle non isocèle. Soit ω le cercle inscrit et I son centre. On note M, N, P les points de contact de ω avec les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Soit J le point d'intersection entre (MN) et (IC). La droite (PJ) recoupe ω en K. Montrer que

a) $CKIP$ est cyclique ;

b) (CI) est la bissectrice de $\widehat{PCK}$.

Solution de l'exercice 4



a) Comme $(IN) \perp (NC)$ et $(IM) \perp (MC)$, les points M et N sont situés sur le cercle de diamètre $[IC]$, donc I, M, C, N sont cocycliques.

D'après la puissance d'un point par rapport à ce cercle, on a $JI \cdot JC = JM \cdot JN$. D'autre part, en utilisant la puissance par rapport au cercle inscrit, on a $JM \cdot JN = JK \cdot JP$, donc finalement $JI \cdot JC = JK \cdot JP$, ce qui entraîne que P, I, K, C sont cocycliques.

b) D'après la question a), on a $\widehat{ICP} = \widehat{IKP}$ et $\widehat{KCI} = \widehat{KPI}$. Or, IPK est isocèle en I, donc $\widehat{IKP} = \widehat{KPI}$, ce qui entraîne que $\widehat{ICP} = \widehat{KCI}$.