OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES - ANIMATH
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75005 Paris
ofm@animath.fr

TEST DU GROUPE A ET DES CANDIDATES À L'ÉPREUVE EGMO
VENDREDI 20 FÉVRIER 2015
CORRIGÉ

Exercice 1. Dans un pays, se trouvent 100 villes. Chacune de ces villes est reliée à exactement trois autres villes par des routes directes dans les deux sens. Prouver qu'il existe une ville A à partir de laquelle on peut aller de ville en ville et revenir en A, sans jamais passer deux fois par une même route, et en utilisant un nombre total de routes qui n'est pas divisible par 3 (il n'est pas demandé que toutes les villes du pays soient visitées au cours de ce voyage).

Solution de l'exercice 1

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de villes, on peut considérer un chemin C de longueur maximale. Soit v_0 une des villes extrémités de C et parcourons C en partant de v_0 en numérotant les villes au fur et à mesure. La maximalité de C assure que les trois villes reliées à v_0 par une route sont dans C. Il s'agit de v_1, v_i et v_j avec $1 < i < j$. On a ainsi identifié trois cycles :

$$v_0, v_1, \cdots, v_i, v_0, \text{ de longueur } i+1,$$
$$v_0, v1, \cdots, v_j, v_0, \text{ de longueur } j+1,$$
$$v_0, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_j, v_0, \text{ de longueur } j-i+2.$$

Si $i+1$ ou $j+1$ n'est pas divisible par 3, l'un des deux premiers cycles convient. Sinon, c'est que $i = j = -1 \bmod 3$, d'où $j - i + 2 = 2 \bmod 3$ et le troisième cycle permet de conclure.

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes P à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que, pour tous p premier et u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $p \mid uv-1$ on ait : $p \mid P(u)P(v) - 1$.

Solution de l'exercice 2

Soit f un tel polynôme, et $n \geqslant 0$ son degré. Clairement f n'est pas le polynôme nul.

Posons $g(X) = X^n f(\frac{1}{X})$. Alors g est un polynôme à coefficients entiers.

Soit x un entier non nul , et p un nombre premier avec $p > \max(|x|, |f(x)g(x) - x^n|)$. Alors x est inversible modulo p, et il existe $y > 0$ tel que $xy = 1 \bmod p$. On vérifie facilement que $x^n f(y) = g(x) \bmod [p]$.

D'autre part, on sait que $f(x)f(y) = 1 \bmod p$, d'où $x^n = x^n f(x)f(y) = f(x)g(x) \bmod [p]$. Ainsi p divise $f(x)g(x) - x^n$ avec $p > |f(x)g(x) - x^n|$, d'où $f(x)g(x) = x^n$, pour tout $x \neq 0$ (et donc aussi pour $x = 0$ comme égalité entre deux polynômes).

Puisque f est de degré n, on en déduit que g est constant et que $f(X) = aX^n$, où a est un entier. En reportant dans $f(x)g(x) = x^n$, il vient immédiatement $a = \pm 1$, et donc $f(X) = \pm X^n$.

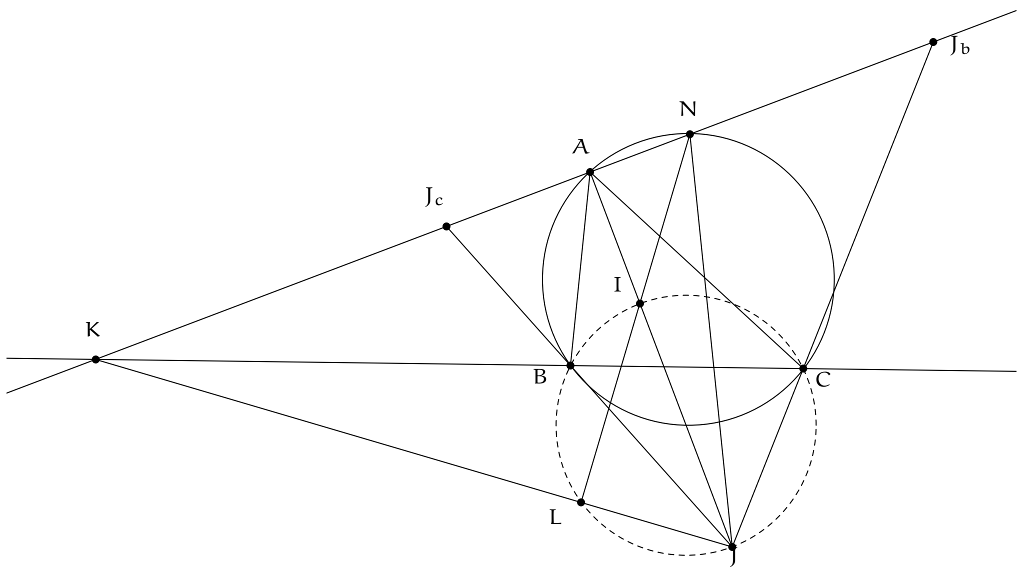
Réciproquement, tout polynôme de la forme $f(X) = \pm X^n$ est bien une solution du problème puisque, pour tous entiers u et v et tout nombre premier p, si $uv = 1 \bmod [p]$ alors $u^n v^n = 1 \bmod [p]$.

Finalement, les polynômes cherchés sont ceux de la forme $f(X) = \pm X^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle non isocèle en A et Γ son cercle circonscrit. Soit N le milieu de l'arc de Γ entre B et C qui contient A. Soient I le centre du cercle inscrit à ABC, J le centre du cercle A-exinscrit à ABC et K le point d'intersection de (BC) avec la bissectrice extérieure de $\angle BAC$.

Montrer que $(JN) \perp (IK)$.

Solution de l'exercice 3



Notons J_b et J_c les centres des cercles exinscrits dans les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. Alors I est l'orthocentre de JJ_bJ_c. En utilisant le fait que B et C sont sur le cercle de diamètre J_bJ_c, et que A, B, C, N sont cocycliques, on a $\overline{KJ_b} \cdot \overline{KJ_c} = \overline{KB} \cdot \overline{KC} = \overline{KA} \cdot \overline{KN}$, donc

$$\begin{aligned}(\overline{KA} + \overline{AJ_b})(\overline{KA} + \overline{AJ_c}) &= \overline{KA} \cdot (\overline{KA} + \overline{AN}) \\ \overline{KA}(\overline{AJ_b} + \overline{AJ_c} + \overline{NA}) &= -\overline{AJ_b} \cdot \overline{AJ_c}.\end{aligned}$$

Or, $\overline{AJ_b} + \overline{AJ_c} + \overline{NA} = \overline{NJ_b} + \overline{AJ_c} = \overline{J_cN} + \overline{AJ_c} = \overline{AN}$, donc $\overline{KA} = -\dfrac{\overline{AJ_b} \cdot \overline{AJ_c}}{\overline{AN}}$.

Or, I étant l'orthocentre de JJ_bJ_c, on a $\dfrac{IA}{AJ_b} = \dfrac{AJ_c}{AJ}$. Il vient $\dfrac{IA}{KA} = \dfrac{AN}{AJ}$, donc les triangles rectangles KAI et JAN sont semblables. Comme $(KA) \perp (JA)$, il vient $(KI) \perp (JN)$.

Autre solution. Il suffit de montrer que I est l'orthocentre de KJN. Comme $(AJ) \perp (KN)$, il suffit de voir que $(NI) \perp (KJ)$.

Soit ω le cercle de diamètre $[IJ]$. Il contient les points B et C. Soit L le second point d'intersection de (KJ) avec ω. On a $\overline{KL} \cdot \overline{KJ} = \overline{KB} \cdot \overline{KC} = \overline{KA} \cdot \overline{KN}$ donc A, N, L, J sont cocycliques.

Or, $(JA) \perp (AN)$, donc $(JL) \perp (LN)$.

De plus, comme ω a pour diamètre [IJ], on a $(JL) \perp (IL)$, donc N, I, L sont alignés. Il vient $(NI) \perp (JL)$.

Exercice 4. Déterminer tous les polynômes P et Q à coefficients entiers tels que, si l'on définit la suite (x_n) par $x_0 = 2015$, $x_{2n+1} = P(x_{2n})$ et $x_{2n+2} = Q(x_{2n+1})$ pour tout $n \geqslant 0$, alors tout entier $m > 0$ divise au moins un terme non nul de la suite.

Solution de l'exercice 4 Soit P et Q deux tels polynômes.

On dira qu'une suite (y_n) d'entiers *possède la propriété* D si tout entier $m > 0$ divise au moins un terme non nul de cette suite. On dira qu'un polynôme T à coefficients entiers *possède la propriété* D s'il existe un entier a tel que la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = T(x_n)$ possède la propriété D.

Nous débutons maintenant par trois lemmes.

Lemme 1. Soit (x_n) une suite d'entiers et soit k un entier naturel non nul. Alors (x_n) possède la propriété D si et seulement si l'une des k suites (x_{kn}), $(x_{kn+1}), \ldots, (x_{kn+k-1})$ possède la propriété D.

Preuve du lemme 1. Supposons d'abord qu'aucune des k suites (x_{kn}), $(x_{kn+1}), \ldots, (x_{kn+k-1})$ ne possède la propriété D. Alors, pour chaque entier $\ell \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, il existe un entier M_ℓ qui ne divise aucun terme non nul de la suite $(x_{kn+\ell})$. En particulier, l'entier $\prod_{\ell=0}^{k-1} M_\ell$ ne peut donc diviser aucun terme non nul de la suite (x_n), qui ne peut posséder la propriété D non plus.

Réciproquement, si une suite $(x_{kn+\ell})$ a la propriété D, alors clairement (x_n) a la propriété D aussi.

Lemme 2. Soit T un polynôme à coefficients entiers, de degré d et de coefficient dominant ρ. Si R possède la propriété D, alors $d = 1$ et $|\rho| < 4$.

Preuve du lemme 2. Si T est constant, la suite (x_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, ce qui lui interdit d'avoir la propriété D. Procédons maintenant par l'absurde, et supposons que $d \geqslant 2$ ou que $d = 1$ et $|\rho| \geqslant 4$. Il existe alors un réel $c > 0$ tel que

$$|T(x)| > 3|x| \text{ pour tout } x \text{ tel que } |x| > c. \ (1)$$

On note qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers dans $[-c; c]$ et que chacun d'eux ne peut être atteint qu'un nombre fini de fois par T. Ainsi, il existe un entier $N \geqslant 0$ tel que $|x_N| > c$. Une récurrence immédiate à l'aide de (1) montre qu'alors $|x_i| > c$ pour tout $i \geqslant N$.

De plus, sans perte de généralité, on peut choisir N minimal ayant cette propriété. On a donc

$$|x_i| \leqslant c \text{ pour tout } i < N, \text{ et } |x_i| > c \text{ pour tout } i \geqslant N. \ (2)$$

En particulier, de (1) et (2), on déduit que $|x_{N+1}| > \max(c, |x_0|, \cdots, |x_N|)$.

Posons $m = |x_{N+1} - x_N|$, qui est bien un entier strictement positif. Alors :

$m \geqslant |x_{N+1}| - |x_N| > 2|x_N| > \max(|x_0|, \cdots, |x_N|)$, ce qui assure m ne divise aucun x_i non nul lorsque $i \leqslant N$. Mais alors m ne divise pas x_{N+1} non plus.

D'autre part, puisque T est à coefficients entiers, $x_{n+1} - x_n = T(x_n) - T(x_{n-1})$ est divisible par $x_n - x_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. En particulier, pour tout $n \geqslant N$, on a $x_{n+1} - x_n$ divisible par m, et donc

$$x_{n+1} - x_{N+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_{N+2} - x_{N+1})$$

est lui aussi divisible par m. Mais, m ne divisant pas x_{N+1}, il ne divise donc pas non plus x_n pour tout $n \geqslant N+1$. Finalement, m ne divise aucun terme non nul de la suite, en contradiction avec l'hypothèse que (x_n) possède la propriété D.

Lemme 3. Soit $T(X) = \rho X + \theta$ un polynôme à coefficients entiers. Si T possède la propriété D, alors $\rho = 1$.

Preuve du lemme 3. Si T possède la propriété D, soit x_0 un entier tel que la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = T(x_n)$ ait la propriété D. D'après le lemme 1, l'une des suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) a la propriété D, et satisfait bien $x_{n+2} = T(T(x_n))$. Le polynôme $T(T(X))$ a donc également la propriété D.

Or, $T(T(X))$ est de coefficient dominant ρ^2. Le lemme 2 montre donc que $\rho^2 < 4$, donc que $\rho \in \{-1, 0, 1\}$. Puisque ρ est un coefficient dominant de T, on a nécessairement $\rho \neq 0$. De plus, si $\rho = -1$, alors $T(T(X)) = X$ n'a pas la propriété D. Il s'ensuit que $\rho = 1$.

Revenons maintenant à l'exercice.

On pose $H(X) = P(Q(X))$ et $K(X) = Q(P(X))$.

D'après le lemme 1, l'une des deux suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) possède la propriété D, donc l'un des polynômes H et K possède la propriété D, car $x_{2k+2} = H(x_{2k})$ et $x_{2k+3} = K(x_{2k+1})$.

Puisque $\deg H = (\deg P) \cdot (\deg Q) = \deg K$, le lemme 2 indique que $\deg H = \deg P = \deg Q = \deg K = 1$. Notons alors $P(X) = aX + b$ et $Q(X) = cX + d$. On a alors $H(X) = acX + ad + b$ et $K(X) = acX + bc + d$, donc le lemme 3 indique que $a = c = \pm 1$.

Finalement, notons que $x_{2n} = 2015 + (ad + b)n$ et que $x_{2n+1} = (a2015 + d) + (bc + d)n$. Or, une suite arithmétique (y_n) de raison r a la propriété D si et seulement si r divise y_0 :

— si $y_0 = qr$, et si $m \in \mathbb{N}^*$, alors $q^2m - q \geqslant 0$ et m divise $y_{q^2m-q} = q^2mr$;

— si r ne divise pas y_0, alors r ne divise aucun entier y_n.

Or, le lemme 1 inidique que (x_n) a la propriété D si et seulement si (x_{2n}) ou (x_{2n+1}) a la propriété D. Dans le premier cas, cela signifie que $ad + b$ divise $x_0 = 2005$. Dans le second cas, cela signifie que $bc + d$ divise $x_1 = 2005c + d$. Or, notons que $|ad + b| = |bc + d|$.

Les paires des polynômes $(P(X), Q(X))$ recherchées sont donc les paires $(P(X), Q(X)) = (\varepsilon X + b, \varepsilon X + d)$ telles que $\varepsilon = \pm 1$ et $b + \varepsilon d$ divise 2005 ou $2005 + \varepsilon d$.