OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST D'ENTRAINEMENT (ENVOI 6)

COMPOSER DE PRÉFÉRENCE LE WEEK-END DU 14 ET 15 MARS 2015

A RENVOYER AVANT LE 30 MARS 2015

DURÉE : 2 SÉANCES DE 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Le groupe B est constitué des élèves nés en 2000 ou après, avec les exceptions suivantes :
  * les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
  * les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2013-2014 sont dans le groupe A.
  Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé « commun » est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Jour 1, exercices du groupe B

Exercice 1. Calculer

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2014^2}+\frac{1}{2015^2}}.$$

Exercice 2. Soient p et q deux nombres premiers supérieurs ou égaux à 7. Soit $x = \dfrac{p^{2012}+q^{2016}}{120}$. Calculer $x - [x]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Exercice 3. Soit ABC un triangle. On dessine des triangles équilatéraux ABE et ACF à l'extérieur de ABC. Soit G le centre de gravité de ABE et K le milieu de $[EF]$. Déterminer les angles du triangle KCG.

Jour 1, exercice commun

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier.
On considère un ensemble de $4n+5$ points du plan, trois jamais alignés, et chacun coloré soit en rouge soit en bleu.
Prouver qu'il existe n triangles dont les sommets sont tous d'une même couleur (la même pour tous les triangles), et dont les intérieurs respectifs sont deux à deux disjoints et ne contiennent aucun point coloré.

Jour 1, exercices du groupe A

Exercice 5. Soit ABC un triangle non isocèle inscrit dans un cercle Γ de rayon R. Le cercle passant par A et tangent en C à $[BC]$ recoupe le cercle passant par B et tangent en C à $[AC]$ au point D.
a) Montrer que $CD \leqslant R$.
b) Montrer que lorsque C se déplace sur Γ, la droite (CD) passe par un point fixe.

Exercice 6. Existe-t-il des entiers strictement positifs a et b tels que $a^n + n^b$ et $b^n + n^a$ soient premiers entre eux pour tout entier $n \geqslant 0$?

Jour 2, exercices du groupe B

Exercice 7. Les Xantiens sont les habitants, en nombre éventuellement infini, de la planète Xanta. Vis-à-vis d'eux-mêmes et de leurs semblables, les Xantiens sont capables de ressentir deux types d'émotions, qu'ils appellent *amour* et *respect*. Il a été observé que :
- Chaque Xantien aime un et un seul Xantien, et respecte un et un seul Xantien.
- Si A aime B, alors tout Xantien qui respecte A aime également B.
- Si A respecte B, alors tout Xantien qui aime A respecte également B.
- Chaque Xantien est aimé d'au moins un Xantien.

Est-il vrai que chaque Xantien respecte le Xantien qu'il aime ?

Exercice 8. Déterminer tous les entiers strictement positifs a et b tels que $4a+1$ et $4b-1$ soient premiers entre eux, et tels que $a+b$ divise $16ab+1$.

Exercice 9. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 40°$ et $\widehat{B} = 60°$. Soient D et E des points de $[AC]$ et $[AB]$ tels que $\widehat{CBD} = 40°$ et $\widehat{ECB} = 70°$. On note F l'intersection de (BD) et (CE). Monter que $(AF) \perp (BC)$.

Jour 2, exercice commun

Exercice 10. Pour tout entier strictement positif x, on note $S(x)$ la somme des chiffres de son écriture décimale.
Soit $k > 0$ un entier. On définit la suite (x_n) par $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = S(kx_n)$ pour tout $n > 0$.
Prouver que $x_n < 27\sqrt{k}$, pour tout $n > 0$.

Jour 2, exercices du groupe A

Exercice 11. Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que $a+b+c = 9$. Montrer que

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9} + \frac{b^3+c^3}{bc+9} + \frac{c^3+a^3}{ca+9} \geqslant 9.$$

Exercice 12. Déterminer tous les entiers $n > 0$ ayant la propriété suivante : "tout nombre strictement positif qui s'écrit comme la somme des carrés de n entiers multiples de n peut également s'écrire comme la somme des carrés de n entiers dont aucun n'est un multiple de n".