OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST D'ENTRAINEMENT (envoi 6)
Corrigé

Exercice 1. Calculer

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2014^2}+\frac{1}{2015^2}}.$$

Solution de l'exercice 1 On réduit au même dénominateur

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} &= \frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}\\
&= \frac{n^4+n^2(2n+1)+n^2+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\\
&= \frac{n^4+2n^2(n+1)+(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\\
&= \frac{(n^2+(n+1))^2}{n^2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que la somme recherchée vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2014}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{2014} 1+\frac{1}{n(n+1)}\\
&= 2014+\sum_{n=1}^{2014}\frac{1}{n(n+1)}\\
&= 2014+\sum_{n=1}^{2014}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\
&= 2014+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique. Les termes se simplifient deux à deux, sauf 1 et $\frac{1}{2015}$, donc la somme vaut

$$2014+1-\frac{1}{2015}=2015-\frac{1}{2015}.$$

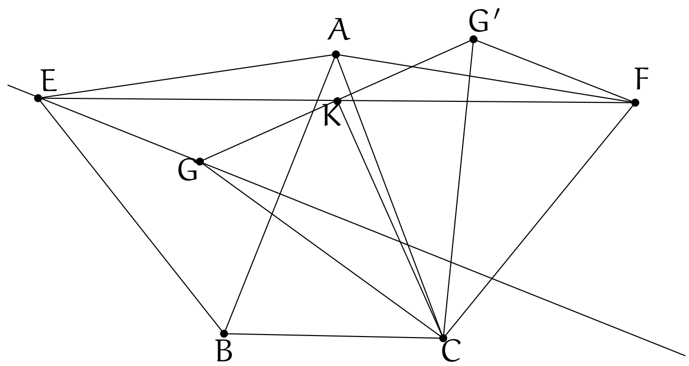
Exercice 2. Soient p et q deux nombres premiers supérieurs ou égaux à 7. Soit $x = \dfrac{p^{2012} + q^{2016}}{120}$. Calculer $x - [x]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Solution de l'exercice 2 Si a est un entier non divisible par $2, 3$ et 5, on vérifie facilement que a^4 est congru à 1 modulo $3, 5$ et 8. Autrement dit, $a^4 - 1$ est divisible par $3, 5$ et 8, donc par $3 \times 5 \times 8 = 120$. On en déduit que p^4 et q^4 sont congrus à 1 modulo 120, donc $p^{2012} + q^{2016} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{120}$.

On en déduit que $x - [x] = \dfrac{2}{120} = \dfrac{1}{60}$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle. On dessine des triangles équilatéraux ABE et ACF à l'extérieur de ABC. Soit G le centre de gravité de ABE et K le milieu de $[EF]$. Déterminer les angles du triangle KCG.

Solution de l'exercice 3



Montrons que GKC est rectangle en K avec $\widehat{CGK} = 60°$. Pour cela, considérons le symétrique G' de G par rapport à K : il suffit de montrer que GCG' est équilatéral.
Comme $EGFG'$ est un parallélogramme, on a $G'F = EG$, et comme G est le centre du cercle circonscrit à ABE, on a $GA = GE$, donc $GA = G'F$.
D'autre part, $AC = FC$ car AFC est équilatéral.
Enfin, $\widehat{GAC} = 30° + \widehat{BAC}$ et $(\overrightarrow{FG'}, \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{AG}) + (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{FC}) = 60° + (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) - 60° = (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC})$, donc GAC et $G'FC$ sont isométriques.
Or, F est obtenu à partir de A en effectuant une rotation de $60°$ sutour de C, donc cette rotation envoie le triangle GAC sur $G'FC$. En particulier, $GC = G'C$ et $\widehat{GCG'} = 60°$, ce qui conclut.

Autre méthode. Si on connaît les nombres complexes, il est facile de résoudre l'exercice par une méthode analytique systématique.
On prend un repère tel que A soit l'origine. On nomme b, c, e, f, g, k les affixes de B, C, E, F, G, K. On a alors $e = e^{-i\pi/3}b$, $f = e^{i\pi/3}c$, $k = (e+f)/2$, $g = (b+e)/3$. Il est alors facile de vérifier que $c - k = i\sqrt{3}(g - k)$, ce qui montre que $(CK) \perp (GK)$ et que $CK = GK \times \sqrt{3}$, ce qui conclut.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier.
On considère un ensemble de $4n + 5$ points du plan, trois jamais alignés, et chacun coloré soit en rouge soit en bleu.

Prouver qu'il existe n triangles dont les sommets sont tous d'une même couleur (la même pour tous les triangles), et dont les intérieurs respectifs sont deux à deux disjoints et ne contiennent aucun point coloré.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
<u>*Lemme.*</u> Soit $n \geqslant 3$ et $m \geqslant 1$ des entiers.
On considère un n-gone convexe P et m de ses points intérieurs, trois des $n+m$ points jamais alignés. Alors, on peut trianguler P en $n+2m-2$ triangles dont les sommets sont tous parmi les $n+m$ points, aucun de ces triangles ne contenant un des m points en son intérieur.

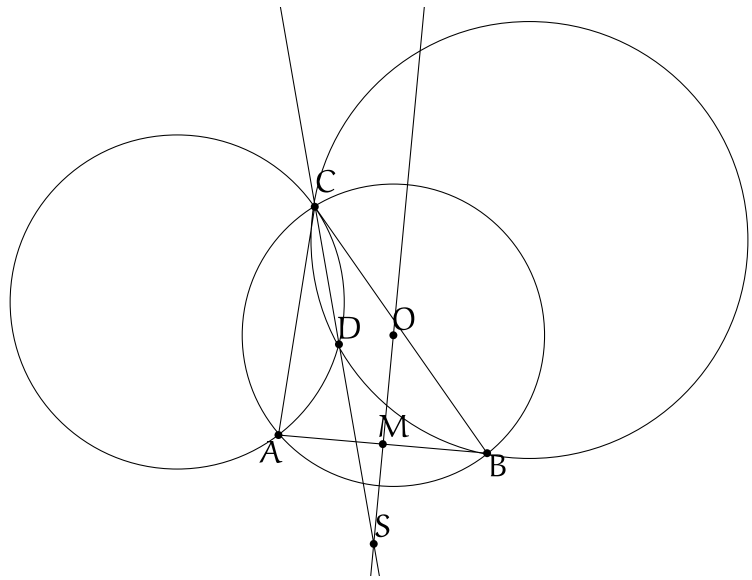
<u>*Preuve du lemme.*</u> On procède par récurrence sur m.
Pour $m = 1$, il suffit de joindre le point intérieur à chacun des sommets, ce qui donne une triangulation adéquate de P en k triangles.
Supposons que l'affirmation soit vraie pour la valeur m et donnons-nous $m+1$ points intérieurs à P. Soit I un de ces points intérieurs. A l'aide des m autres points intérieurs, d'après l'hypothèse de récurrence, on peut trianguler P de la façon souhaitée en $k+2m-2$ triangles. Comme I est intérieur à P, il est donc intérieur à l'un de ces triangles. En joignant I à chacun des trois sommets de ce triangle, on obtient ainsi une triangulation adéquate en $k+2m-2+2 = k+2(m+1)-2$ triangles, ce qui achève la preuve.

Revenons à l'exercice. Notons r (resp. b) le nombre de points rouges (resp. bleus). On a donc $r+b = 4n+5$.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $r \geqslant b$ et donc $r \geqslant 2n+3$.
Soit P l'enveloppe convexe des points rouges, et on suppose que P est un k-gone. En particulier, il n'existe aucun point rouge en dehors de P, donc il y a m points rouges intérieurs à P, avec $k+m = r \geqslant 2n+3$. (1)
On note w le nombre points bleus intérieurs à P.
D'après le lemme, en ne considérant que les points rouges, on peut obtenir une triangulation de P en $k+2m-2$ triangles à sommets rouges et ne contenant intérieurement aucun point rouge.
Si au moins n de ces triangles ne contiennent aucun point bleu, c'est fini.
Sans quoi, au plus $n-1$ des triangles à sommets rouges ne contiennent pas de point bleu. Cela assure qu'au moins $k+2m-2-(n-1) = k+2m-(n+1)$ triangles à sommets rouges contiennent chacun au moins un point bleu et, ces triangles étant d'intérieurs deux à deux disjoints, on a donc $w \geqslant k+2m-(n+1)$.
Soit Q l'enveloppe convexe de ces w points bleus intérieurs à P. Comme ci-dessus, on peut trianguler Q en au moins $w-2$ triangles ne contenant aucun point bleu en leurs intérieurs.
Par l'absurde : supposons qu'au plus $n-1$ de ces triangles bleus ne contiennent pas de point rouge.
Alors, au moins $w-2-(n-1)$ triangles bleus contiennent au moins un point rouge et on a $m \geqslant w-(n+1)$. Par suite, on a $m \geqslant k+2m-(n+1)-(n+1)$, d'où $k+m \leqslant 2n+2$, en contradiction avec (1).

Ainsi, au moins n de ces triangles à sommets bleus ne contiennent aucun point rouge, ce qui conclut.

Exercice 5. Soit ABC un triangle non isocèle inscrit dans un cercle Γ de rayon R. Le cercle passant par A et tangent en C à $[BC]$ recoupe le cercle passant par B et tangent en C à $[AC]$ au point D.
a) Montrer que $CD \leqslant R$.
b) Montrer que lorsque C se déplace sur Γ, la droite (CD) passe par un point fixe.

Solution de l'exercice 5



a) On observe d'abord que $(AD, AC) = (CD, CB)$ et $(BC, BD) = (CA, CD)$, donc DAC et DCB sont directement semblables. On en déduit que $DC^2 = DA \cdot DB$.
De plus, en notant $\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, on a $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) = \pi - \gamma$ et de même $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) = \pi - \gamma$, donc $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = 2\gamma$. Il vient

$$\begin{aligned} AB^2 &= DA^2 + DB^2 - 2DA \cdot DB \cos 2\gamma = DA^2 + DB^2 - 2DA \cdot DB(1 - 2\sin^2\gamma) \\ &= (DA - DB)^2 + 4DA \cdot DB \sin^2\gamma \geqslant 4DA \cdot DB \sin^2\gamma = (2DC \sin\gamma)^2. \end{aligned}$$

Or, $2R = \dfrac{AB}{\sin\gamma}$, donc $R \geqslant CD$.
b) On va montrer que (CD) passe par le point de rencontre des tangentes en A et B au cercle circonscrit, que nous appellerons S. Il est connu que (CS) est la symédiane du triangle passant par C, donc il suffit de montrer que (CD) est une symédiane.
Notons M le milieu de $[AB]$. Comme les aires de ACM et BCM sont égales, on a $\frac{1}{2}CA \times CM \times \sin\widehat{ACM} = \frac{1}{2}CB \times CM \times \sin\widehat{MCB}$, donc $CA \sin\widehat{ACM} = CB \sin\widehat{MCB}$.
On en déduit que si Δ est la symédiane et θ est l'angle entre (CA) et Δ, alors $\dfrac{\sin\theta}{\sin(\gamma - \theta)} = \dfrac{\sin\widehat{MCB}}{\sin\widehat{ACM}} = \dfrac{CA}{CB}$. Il suffit donc de montrer que $\dfrac{\sin\widehat{ACD}}{\sin\widehat{DCB}} = \dfrac{CA}{CB}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin\widehat{ACD}}{\sin\widehat{DCB}} &= \frac{\sin\widehat{ACD}}{AD} \times \frac{DB}{\sin\widehat{DCB}} \times \frac{DA}{DB} \\ &= \frac{\sin\widehat{CDA}}{AC} \times \frac{BC}{\sin\widehat{BDC}} \times \frac{DA}{DB}. \end{aligned}$$

Or, $\widehat{CDA} = \widehat{BDC} = \pi - \gamma$ et $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DC}{DA} = \dfrac{DB}{DC}$, donc

$$\frac{\sin\widehat{ACD}}{\sin\widehat{DCB}} = \frac{BC}{AC} \times \frac{DA}{DC} \times \frac{DC}{DB} = \frac{DC}{DB} = \frac{CA}{CB}.$$

Exercice 6. Existe-t-il des entiers strictement positifs a et b tels que $a^n + n^b$ et $b^n + n^a$ soient premiers entre eux pour tout entier $n \geqslant 0$?

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
Par l'absurde : supposons qu'il existe de tels entiers a et b.
Par symétrie, on peut supposer que $a \geqslant b$.
Si $d = \text{pgcd}(a, b)$ alors, pour $n = d$, il est clair que d divise $a^d + d^b$ et $b^d + d^a$. Or ces deux nombres étant censés être premiers entre eux, c'est que $d = 1$.

Soit $N = a^a + b^b$. On a $N > 1$ donc il existe un nombre premier p qui divise N. De plus, p ne peut diviser a sans quoi il devrait diviser également b, en contradiction avec $d = 1$. Ainsi, a est inversible modulo p et il existe un entier $k \in \{0, \cdots, p-1\}$ tel que $ka = b \bmod [p]$.

On choisit alors $n = k + p(a - b - k + p - 1)$. D'après le petit théorème de Fermat, il vient :

$$a^n + n^b \equiv a^k \cdot a^{a-b-k+p-1} + k^b \equiv a^{a-b} + k^b \bmod [p]$$

d'où $a^b(a^n + n^b) \equiv a^a + b^b \equiv 0 \bmod [p]$,
et, puisque p ne divise par a, on a alors $a^n + n^b \equiv 0 \bmod [p]$.

On prouve de même, on a $b^n + n^a \equiv 0 \bmod [p]$.
Mais, alors p divise à la fois $a^n + n^b$ et $b^n + n^a$, ce qui contredit qu'ils soient premiers entre eux.

Finalement, il n'existe pas de tels entiers.

Exercice 7. Les Xantiens sont les habitants, en nombre éventuellement infini, de la planète Xanta. Vis-à-vis d'eux-mêmes et de leurs semblables, les Xantiens sont capables de ressentir deux types d'émotions, qu'ils appellent *amour* et *respect*. Il a été observé que :
- Chaque Xantien aime un et un seul Xantien, et respecte un et un seul Xantien.
- Si A aime B, alors tout Xantien qui respecte A aime également B.
- Si A respecte B, alors tout Xantien qui aime A respecte également B.
- Chaque Xantien est aimé d'au moins un Xantien.

Est-il vrai que chaque Xantien respecte le Xantien qu'il aime ?

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
Pour chaque Xantien x, désignons respectivement par $f(x)$ et $g(x)$ les Xantiens aimés et respectés par x.
La première condition assure que l'on a bien défini des fonctions f et g de l'ensemble X des Xantiens sur lui-même.
Il s'agit de savoir si, pour tout x, on a $f(x) = g(x)$.
En fait, nous allons même prouver que, pour tout x, on a $f(x) = g(x) = x$.

Soit x un Xantien.
Il respecte $g(x)$ qui, de son côté, aime $f(g(x))$.
La seconde condition assure donc que $f(g(x)) = f(x)$ pour tout x. (1)
De même, la troisième condition conduit à $g(f(x)) = g(x)$ pour tout x. (2)
Enfin, la quatrième condition signifie que f est surjective.

Soit x un Xantien. Il existe donc un Xantien y tel que $f(y) = x$.
Or, on a $f(g(f(y))) = f(g(y))$ d'après (2)

et ainsi, d'après (1), il vient $f(f(y)) = f(y)$, ou encore $f(x) = x$.
De (1), on déduit alors immédiatement que $g(x) = x$.

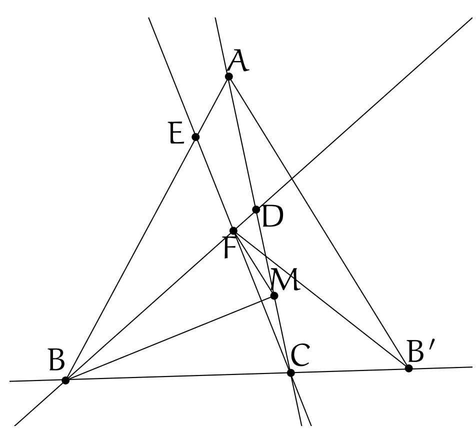
Finalement, pour tout x, on a bien $f(x) = g(x) = x$.

Exercice 8. Déterminer tous les entiers strictement positifs a et b tels que $4a+1$ et $4b-1$ soient premiers entre eux, et tels que $a+b$ divise $16ab+1$.

Solution de l'exercice 8 Notons (C) la condition de l'énoncé. Les entiers $4a+1$ et $4b-1$ sont premiers entre eux si et seulement si $4a+1$ est premier avec $(4a+1)+(4b-1) = 4(a+b)$. Or, $4a+1$ est impair donc il est automatiquement premier avec 4. On en déduit que $4a+1$ et $4b-1$ sont premiers entre eux si et seulement si $4a+1$ est premier avec $a+b$.
D'autre part, $16ab+1 = 16a(a+b)+(1-16a^2) = 16a(a+b)-(4a-1)(1+4a)$, donc $a+b$ divise $16ab+1$ si et seulement si $a+b$ divise $(4a-1)(1+4a)$. Or, si $a+b$ est premier avec $1+4a$ alors ceci équivaut à $a+b \mid 4a-1$.
On en déduit que (C) équivaut à ce que $\text{pgcd}(a+b, 4a+1) = 1$ et $a+b \mid 4a-1$.
D'autre part, montrons que si $a+b \mid 4a-1$ alors on a automatiquement $\text{pgcd}(a+b, 4a+1) = 1$. En effet, si un nombre premier p divise $a+b$ et $4a+1$, alors il divise $4a-1$ et $4a+1$, donc il divise $(4a+1)-(4a-1) = 2$. Il vient $p = 2$, puis $2 \mid 4a-1$. Impossible.
Finalement, (C) équivaut à $a+b \mid 4a-1$.
Or, $a+b > a > \dfrac{4a-1}{4}$, donc $a+b \mid 4a-1$ ne peut se produire que si $a+b = 4a-1$ ou $a+b = \dfrac{4a-1}{2}$ ou $a+b = \dfrac{4a-1}{3}$.
Le deuxième cas ne peut pas se produire car $4a-1$ est impair.
(C) équivaut donc à $a+b = 4a-1$ ou $a+b = \dfrac{4a-1}{3}$, c'est-à-dire $b = 3a-1$ ou $a = 3b+1$.

Exercice 9. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 40°$ et $\widehat{B} = 60°$. Soient D et E des points de $[AC]$ et $[AB]$ tels que $\widehat{CBD} = 40°$ et $\widehat{ECB} = 70°$. On note F l'intersection de (BD) et (CE). Monter que $(AF) \perp (BC)$.

Solution de l'exercice 9



On a $\widehat{BFC} = 180° - \widehat{CBF} - \widehat{FCB} = 180° - 40° - 70° = 70° = \widehat{FCB}$ donc BCF est isocèle en B. Il vient $BC = BF$.
Soit M le point d'intersection entre la bissectrice de $\widehat{CBF}$ et (AC). On a $\widehat{BMA} = 40° = \widehat{BAM}$ donc $MA = MB$.
D'autre part, $\widehat{BMC} = 180° - \widehat{CBM} - \widehat{MCB} = 180° - 20° - 80° = 80° = \widehat{MCB}$ donc $BC = BM$.
On déduit de ce qui précède que $MA = BF$.

Soit $B' \in (BC)$ tel que ABB' est équilatéral. Soit Δ la bissectrice de $\widehat{B'BA}$. Comme $BF = BM$ et $\widehat{FBA} = \widehat{CBM}$, les points M et F sont symétriques par rapport à Δ. Or, A et B' sont aussi symétriques par rapport à Δ, donc $MA = FB'$.
Finalement, $FB' = FB$, donc F appartient à la médiatrice de $[BB']$, qui est aussi la hauteur (AF) du triangle ABB'.

<u>Autre solution.</u> Notons H le projeté de F sur $[BC]$ et H' le projeté de A sur $[BC]$. Il s'agit de montrer que $H = H'$. Pour cela, il suffit de voir que $BH = BH'$.
On a $BH' = AB\cos 60$ et $BH = BF\cos 40 = BC\cos 40$. Comme $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sin 80}{\sin 40}$, il suffit de montrer que $\sin 80 \cos 60 = \sin 40 \cos 40$, c'est-à-dire (compte tenu de $\cos 60 = \frac{1}{2}$) que $\sin 80 = 2\sin 40 \cos 40$, ce qui est vrai d'après la formule générale $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Exercice 10. Pour tout entier strictement positif x, on note $S(x)$ la somme des chiffres de son écriture décimale.
Soit $k > 0$ un entier. On définit la suite (x_n) par $x_1 = 1$ et $x_{n+1} = S(kx_n)$ pour tout $n > 0$.
Prouver que $x_n < 27\sqrt{k}$, pour tout $n > 0$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>
<u>*Lemme.*</u> Pour tout entier $s \geqslant 0$, on a $10^s \geqslant (s+1)^3$.

<u>*Preuve du lemme.*</u> On raisonne par récurrence sur s.
Pour $s = 0$, on a $10^0 = 1 = (0+1)^3$.
Supposons l'inégalité vraie pour la valeur s. Alors :

$$\begin{aligned} 10^{s+1} &\geqslant 10(s+1)^3 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 10s^3 + 30s^2 + 30s + 10 \\ &\geqslant s^3 + 6s^2 + 12s + 8 \\ &= (s+2)^3, \text{ ce qui achève la preuve.} \end{aligned}$$

Si $x > 0$ est un entier dont l'écriture décimale utilise $s+1$ chiffres, on a $S(x) \leqslant 9(s+1)$ et $10^s \leqslant x < 10^{s+1}$. Or, d'après le lemme, on a $s+1 \leqslant 10^{\frac{s}{3}}$, donc $s+1 \leqslant x^{\frac{1}{3}}$ et ainsi $S(x) \leqslant 9x^{\frac{1}{3}}$.
Montrons maintenant par récurrence que $x_n < 27\sqrt{k}$ pour tout n. L'assertion est claire pour $n = 1$. Supposons $x_n < 27\sqrt{k}$, alors $x_{n+1} = S(kx_n) \leqslant 9(kx_n)^{\frac{1}{3}} < 9(27k\sqrt{k})^{\frac{1}{3}} = 9 \times 3 \times \sqrt{k} = 27\sqrt{k}$, d'où le résultat.

Exercice 11. Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs tels que $a+b+c = 9$. Montrer que

$$\frac{a^3+b^3}{ab+9} + \frac{b^3+c^3}{bc+9} + \frac{c^3+a^3}{ca+9} \geqslant 9.$$

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On cherche une minoration de la forme $\dfrac{a^3+b^3}{ab+9} \geqslant u(a+b)+v$, c'est-à-dire $f(a) \geqslant 0$ où $f(a) = a^3 + b^3 - (u(a+b)+v)(ab+9)$.
En sommant les trois inégalités, on en déduirait $\frac{a^3+b^3}{ab+9} + \frac{b^3+c^3}{bc+9} + \frac{c^3+a^3}{ca+9} \geqslant 2u(a+b+c) + 3v = 3(6u+v)$, donc il suffit que $6u + v = 3$.
D'autre part, si une telle minoration existe, comme l'inégalité devient une égalité lorsque $a = b = c = 3$, on doit avoir $f(3) = 0$ si $b = 3$. Comme de plus $f(a) \geqslant 0$ pour tout a, on doit nécessairement avoir $f'(3) = 0$ pour $b = 3$.
Ceci impose la condition $0 = f'(3) = 27 - 18u - (6u+v) \times 3 = 18(1-u)$, donc $u = 1$ et $v = -3$.

Montrons donc $\dfrac{a^3+b^3}{ab+9} \geqslant (a+b)-3$. Comme $a^3+b^3 \geqslant \dfrac{(a+b)^3}{4}$ et $ab+9 \leqslant (\frac{a+b}{2})^2+9$, il suffit de montrer que

$$\frac{s^3}{s^2+36} \geqslant s-3$$

où $s = a+b$. On réduit au même dénominateur ; l'inégalité se simplifie en $3s^2-36s+108 \geqslant 0$, ou encore en $3(s-6)^2 \geqslant 0$, ce qui est vrai.

Exercice 12. Déterminer tous les entiers $n > 0$ ayant la propriété suivante : "tout nombre strictement positif qui s'écrit comme la somme des carrés de n entiers multiples de n peut également s'écrire comme la somme des carrés de n entiers dont aucun n'est un multiple de n".

Solution de l'exercice 12

Un entier n ayant la propriété désirée sera dit *bon*.

Soit $n \geqslant 2$ un entier bon. Alors $2n$ est également bon : en effet, soit $m = 2n$ et soit $x_1, \cdots, x_m$ des entiers divisibles par m. Si deux de ces entiers sont non nuls, on peut supposer sans perte de généralité qu'il s'agit de x_1 et x_m. Puisque n est bon, il existe alors des entiers y_i non divisibles par n (donc non divisibles par m) tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ et $\sum_{i=n+1}^{2n} x_i^2 = \sum_{i=n+1}^{2n} y_i^2$. Ainsi, $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2$ avec chaque y_i non divisible par m.

Si un et un seul des x_i est non nul, alors $\sum_{i=1}^{m} x_i^2$ est de la forme $(2a)^2 = a^2+a^2+a^2+a^2$ où $a > 0$ est divisible par n et on raisonne de la même manière.

Lemme. Soit $n > 0$ un entier impair et $x_1, \cdots, x_n$ des entiers dont au moins un n'est pas divisible par n. Alors il existe des entiers $y_1, \cdots, y_n$ non divisibles par n tels que $\sum_{i=1}^{n} (nx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Preuve du lemme. Sans perte de généralité, on peut supposer que x_1 n'est pas divisible par n. On pose $X = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Si n divise X, on remplace x_1 par $-x_1$. La nouvelle valeur X' vérifie $X' = X - 4x_1$. Comme n divise X mais pas $4x_1$ (rappelons que n est supposé impair), il ne divise pas X'. Ainsi, sans perte de généralité, on peut supposer que n ne divise pas X.

Il est facile de vérifier que $\sum_{i=1}^{n} (nx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (X - nx_i)^2$. En posant $y_i = X - nx_i$ pour tout i, la conclusion souhaitée en découle.

On peut maintenant prouver que tout $n \geqslant 3$ impair est bon. En effet, si $a > 0$ est un entier qui peut s'écrire comme la somme de n carrés d'entiers tous divisibles par n alors, en considérant la plus grande puissance de n qui divise ces entiers, il existe donc un entier $r > 0$ et des entiers $x_1, \cdots, x_n$ dont au moins un n'est pas divisible par n tels que $a = \sum_{i=1}^{n} (n^r x_i)^2$.

D'après le lemme, il existe des entiers $y_1, \cdots, y_n$ non divisibles par n tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(nx_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n^r x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(n^{r-1}y_i)^2$. Ainsi, en appliquant le lemme r fois de suite, on est assuré de l'existence d'entiers $z_1, \cdots, z_n$ non divisibles par n tels que $a = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i^2$. Cela prouve que n est bon.

Puisque le double de tout entier bon est bon, tout entier qui n'est pas une puissance de 2 est bon.

On prouve maintenant que 8 est bon : En effet, si a est la somme de 8 carrés d'entiers divisibles par 8 alors a est divisible par 64. En particulier $a \geqslant 64$ et, d'après le théorème des quatre carrés de Lagrange, il existe des entiers x_1, x_2, x_3, x_4 tels que $a = 1^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Notons que, puisque $a \equiv 0 \mod [8]$, on a $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 7 \mod [8]$. Or, un carré étant congru à $0, 1$ ou 4 modulo 8, la seule façon d'obtenir une somme de quatre carrés congrue à 7 modulo 8 est d'avoir $1, 1, 1, 4$ à l'ordre près. Ainsi, aucun des x_i n'est divisible par 8, ce qui conclut.

Enfin, on prouve que 4 n'est pas bon. Pour cela, il suffit de constater que $32 = 4^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2$. D'autre part, pour obtenir $32 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, on doit avoir $|x_i| \leqslant 5$ pour tout i. De plus, si l'on veut éviter les multiples de 4, il ne reste plus que $|x_i| = 1, 2, 3$ ou 5. Or, comme ci-dessus en raisonnant modulo 8, la seule possibilités est d'avoir $|x_i| = 2$ pour tout i. Mais, on a $32 \neq 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2$, ce qui assure que 4 n'est pas bon.
Ainsi, tout diviseur de 4 ne peut être bon.

Finalement, tous les entiers $n > 0$ sont bons sauf $1, 2$ et 4.