Olympiades Françaises de Mathématiques 2014-2015

Envoi Numéro 5

À renvoyer au plus tard le samedi 14 mars

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2000 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2013-2014 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B »ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Un polyèdre a 6 sommets et 12 arêtes. Montrer que chaque face est un triangle.

Exercice 2. Sept élèves d'une classe comparent leurs notes dans 12 épreuves, et remarquent qu'il n'existe pas deux élèves ayant des notes identiques dans chacune des 12 épreuves.
Montrer que l'on peut choisir 6 épreuves telles que deux élèves quelconques aient des notes différentes à au moins l'une de ces épreuves.

Exercice 3. Jules et Jim, deux colocataires, reçoivent 10 autres paires de colocataires chez eux. Jules fait un petit sondage au cours de la soirée et interroge les 21 autres personnes. Parmi elles, aucune n'a serré la main de son colocataire, et il n'y en a pas deux qui ont serré le même nombre de mains. Combien de mains a serré Jim ?

Exercices Communs

Exercice 4. 2015 droites deux à deux distinctes sont tracées dans le plan. On suppose qu'elles délimitent moins de 8000 régions (les régions peuvent être non bornées). Montrer que le nombre de régions est égal à 2016, 4030, 6042 ou 6043, et donner un exemple de configuration dans chaque cas.

Exercice 5. Dans un club d'échecs de 20 personnes, 14 parties sont jouées et chaque joueur a joué au moins une partie. Montrer qu'il y a 6 parties auxquelles 12 joueurs différents ont participé.

Exercice 6. On considère un échiquier 2015×2015, auquel on a retiré le carré 2×2 en bas à droite. Montrer qu'on peut le paver par des pièces composées de 3 cases en forme de L (les pièces peuvent être pivotées).

Exercices du groupe A

Exercice 7. n joueurs participent à un tournoi d'échecs. Chaque joueur fait exactement une partie avec chacun des autres joueurs. Une victoire rapporte 1 point, un match nul un demi-point et une défaite aucun point. Une partie est dite anormale si le gagnant de cette partie obtient un score au tournoi strictement plus faible que le perdant.
a) Montrer que la proportion de parties anormales est inférieur ou égale à 75%.
b) Est-il possible qu'elle soit supérieure ou égale à 70% ?

Exercice 8. Soient a et b deux entiers tels que $a+b$ n'est pas divisible par 3. Montrer que l'on ne peut pas colorier les entiers relatifs en trois couleurs de sorte que que pour tout entier n, les trois nombres $n, n+a$ et $n+b$ soient de couleurs différentes.

Exercice 9. Dans tout l'exercice, on s'intéresse à des tableaux 5×5, dont les lignes (resp. les colonnes) sont notées L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 du bas vers le haut (resp. C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, de gauche à droite).
Dans chacune des 25 cases d'un tel tableau, on écrit un nombre. Le nombre qui est dans la case située sur la ligne L_i et la colonne C_j est noté $f(i, j)$.

Un tableau est dit *cohérent* lorsque, pour tous i et j :

Le nombre $f(i, j)$ est le nombre de i écrits dans les cases de la ligne L_j.

Déterminer tous les tableaux cohérents de taille 5×5.