OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ENVOI NO. 5

CORRIGÉ

Exercices du groupe B

Exercice 1. Un polyèdre a 6 sommets et 12 arêtes. Montrer que chaque face est un triangle.

Solution de l'exercice 1 Notons F le nombre de faces, A le nombre d'arêtes et S le nombre de sommets. La formule d'Euler donne $F - A + S = 2$, donc $F = A - S + 2 = 8$.

Notons x_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) le nombre d'arêtes de la face i. On a $x_1 + \cdots + x_8 = 2A = 24$ car chaque arête appartient à exactement deux faces. On en déduit que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_8}{8} = 3,$$

autrement dit le nombre moyen d'arêtes par face est 3. Or, chaque face possède au moins 3 arêtes, donc finalement chaque face est un triangle.

Exercice 2. Sept élèves d'une classe comparent leurs notes dans 12 épreuves, et remarquent qu'il n'existe pas deux élèves ayant des notes identiques dans chacune des 12 épreuves.

Montrer que l'on peut choisir 6 épreuves telles que deux élèves quelconques aient des notes différentes à au moins l'une de ces épreuves.

Solution de l'exercice 2

Soit m le plus petit entier tel que l'on peut choisit m épreuves $E_1, \dots, E_m$ de sorte que deux élèves quelconques aient des notes différentes à au moins l'une de ces m épreuves. On doit montrer que $m \leqslant 6$.

Comme m est minimal, pour tout $i = 1, \dots, m$ il existe une paire A_i d'élèves ayant la même note à toutes les épreuves sauf E_i.

On forme un graphe dont les sommets sont les élèves, et dont les arêtes sont $A_1, \dots, A_m$. Supposons que le graphe possède un cycle $(A_{i_1}, \dots, A_{i_r})$. Notons a et b les extrémités de A_{i_1}. Par hypothèse, a et b obtiennent des notes différentes à l'épreuve i_1. Cependant, le chemin $(A_{i_2}, \dots, A_{i_r})$ montre que a et b obtiennent des notes identiques à l'épreuve i_1, ce qui est contradictoire.

Par conséquent, le graphe est un arbre. Comme un arbre a strictement plus de sommets de d'arêtes, on en déduit que $m < 7$.

Exercice 3. Jules et Jim, deux colocataires, reçoivent 10 autres paires de colocataires chez eux. Jules fait un petit sondage au cours de la soirée et interroge les 21 autres personnes. Parmi elles, aucune n'a serré la main de son colocataire, et il n'y en a pas deux qui ont serré le même nombre de mains. Combien de mains a serré Jim ?

Solution de l'exercice 3 Au cours de la soirée, parmi les 21, chaque personne serre entre 0 et 20 mains. Comme elles serrent toutes un nombre différent de mains, pour tout n compris entre 0 et 20 il existe une et une seule personne A_n parmi les 21 qui a serré exactement n mains.

Comme A_{20} a serré 20 mains, A_{20} a serré la main à tout le monde sauf lui même et son colocataire. Or, A_0 n'a serré la main à personne, donc A_0 est le colocataire de A_{20}.

Comme A_{19} a serré 19 mains, A_{19} a serré la main à tout le monde sauf lui-même, son colocataire et A_0. Or, A_1 a serré la main à A_{20} et à personne d'autre, donc n'a pas serré la main à A_{19}. On en déduit que A_1 est le colocataire de A_{19}.

En continuant le raisonnement, on montre que A_n est le colocataire de A_{20-n} pour tout $n = 0, 1, \dots, 9$, donc A_{10} est le colocataire de Jules. Finalement, Jules a serré 10 mains.

Exercices Communs

Exercice 4. 2015 droites deux à deux distinctes sont tracées dans le plan. On suppose qu'elles délimitent moins de 8000 régions (les régions peuvent être non bornées). Montrer que le nombre de régions est égal à 2016, 4030, 6042 ou 6043, et donner un exemple de configuration dans chaque cas.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Notons $n = 2015$ le nombre de droites, f le nombre de régions, p le nombre maximal de droites parallèles et q le nombre maximal de droites concourantes.

Montrons d'abord que $f \geqslant (p+1)(n-p+1)$. En effet, plaçons d'abord les p droites parallèles. Elles forment $p+1$ régions. Il reste ensuite $n-p$ droites à placer, et chacune de ces droites crée au moins $p+1$ régions supplémentaires.

De même, montrons que $g \geqslant q(n-q+2)$. En effet, on place d'abord q droites concourantes. Chaque nouvelle droite crée au moins $q-1$ points d'intersection, donc au moins q nouvelles régions. On en déduit que $f \geqslant (2q)+(n-q)q = q(n-q+2)$.

Supposons que $3 \leqslant p \leqslant n-3$. Comme l'expression $g(p) = (p+1)(n-p+1)$ est égale à $(n+2)^2/4 - (p-n/2)^2$, la fonction g croît entre 0 et $n/2$ et décroît entre $n/2$ et n, donc $g(p) \geqslant g(3) = 4(n-2) > 8000$. Impossible. On en déduit que $p \in \{1, 2, n-2, n-1, n\}$ et de même $q \in \{1, 2, 3, n-1, n\}$.

Si $p = n$ alors toutes les droites sont parallèles, et on a $f = n+1 = 2016$.

Si $p = n-1$ alors toutes les droites sauf une sont parallèles, et on a $f = 2n = 4030$.

Si $p = n-2$ et les deux droites restantes sont parallèles, ou bien sécantes sur l'une des $n-2$ premières droites, alors $f = 3(n-1) = 6042$.

Si $p = n-2$ et les deux droites restantes sont sécantes ailleurs que sur les $n-2$ premières droites, alors $f = 3n-2 = 6043$.

Si $q = n$ alors $f = 2n$.

Si $q = n-1$ alors $f = 3n-3$ ou $3n-2$ selon que la dernière droite est parallèle ou non à l'une des premières droites.

Il reste à traiter le cas où $p \leqslant 2$ et $q \leqslant 3$. Notons $D_1, \ldots, D_{2015}$ les droites. A chaque fois que l'on trace une droite D_i ($i > 1000$), celle-ci coupe au moins 999 des droites $D_1, \ldots, D_{1000}$, et chacun de ces points d'intersection est commun à au plus deux de ces droites, donc on obtient au moins 500 points d'intersection entre D_i et l'une des 1000 premières droites. Par conséquent, D_i crée au moins 501 régions supplémentaires. On en déduit que $f \geqslant 1015 \times 501 > 8000$.

Exercice 5. Dans un club d'échecs de 20 personnes, 14 parties sont jouées et chaque joueur a joué au moins une partie. Montrer qu'il y a 6 parties auxquelles 12 joueurs différents ont participé.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soit r le plus grand entier tel qu'il existe un ensemble M de r parties faisant intervenir $2r$ joueurs différents.

Notons J l'ensemble des $2r$ personnes qui ont joué les parties de M. Par maximalité de M, si a et b sont deux joueurs n'appartenant pas à J, alors a et b n'ont pas joué entre eux. Par conséquent, ils ont joué une partie contre l'un des $2r$ joueurs de M. On en déduit que le nombre total de parties est au moins égal à $r+(20-2r) = 20-r$. Or, par hypothèse le nombre de parties est 14, donc $14 \geqslant 20-r$, ce qui entraîne $r \geqslant 6$.

Exercice 6. On considère un échiquier 2015×2015, auquel on a retiré le carré 2×2 en bas à droite. Montrer qu'on peut le paver par des pièces composées de 3 cases en forme de L (les pièces peuvent être pivotées).

Solution de l'exercice 6 Comme l'échiquier peut être décomposé en trois rectangles 2010×2015, 5×2004 et 5×11, et comme 2010 et 2004 sont divisibles par 6, il suffit de montrer que

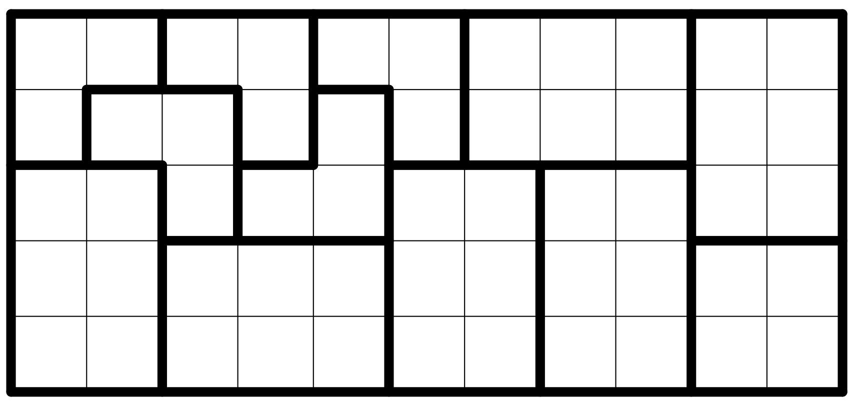
1) Pour tout $n \geqslant 2$ et tout entier m, un échiquier $6m \times n$ peut être pavé par des pièces en forme de L ;

2) L'échiquier 5×11 privé du carré 2×2 en bas à droite peut être pavé par des pièces en forme de L.

Pour le point 1), comme un tel échiquier est réunion d'échiquiers $6 \times n$, on se ramène à traiter le cas $m = 1$.

Il est clair que l'on peut paver un échiquier 3×2, donc aussi des échiquiers 6×2 et 6×3. On peut donc paver tout échiquier de taille $6 \times 2k$ ou $6 \times (2k+3)$. Or, tout entier $n \geqslant 2$ s'écrit sous la forme $2k$ s'il est pair, et $2k+3$ s'il est impair, ce qui conclut.

Le point 2) se démontre en construisant un exemple de pavage :



Exercices du groupe A

Exercice 7. n joueurs participent à un tournoi d'échecs. Chaque joueur fait exactement une partie avec chacun des autres joueurs. Une victoire rapporte 1 point, un match nul un demi-point et une défaite aucun point. Une partie est dite anormale si le gagnant de cette partie obtient un score au tournoi strictement plus faible que le perdant.

a) Montrer que la proportion de parties anormales est inférieure ou égale à 75%.

b) Est-il possible qu'elle soit supérieure ou égale à 70% ?

Solution de l'exercice 7 a) Soit $m = [n/2]$. On classe les joueurs suivant leur score (parmi les joueurs ayant le même score, on les classe arbitrairement). On dira qu'un joueur classé parmi les m meilleurs est *fort* ; sinon, on dira qu'il est *faible*.

Soit x le nombre de parties normales entre les joueurs forts et les joueurs faibles. Les joueurs forts ont marqué au total $m(m-1)/2$ points entre eux, et au plus x lors de parties contre les joueurs faibles.

Notons S_1 le score total des joueurs forts et S_2 le score total des joueurs faibles. On a donc $S_1 \leqslant m(m-1)/2 + x$ et $S_1 + S_2 = n(n-1)/2$.

Le score moyen des joueurs forts, $\frac{S_1}{m}$, est supérieur au score moyen de tous les joueurs : $\dfrac{S_1}{m} > \dfrac{n(n-1)/2}{n}$, i.e. $S_1 > m(n-1)/2$. Par conséquent,

$$x \geqslant S_1 - m(m-1)/2 > \frac{m(n-m)}{2} \geqslant n(n-1)/8.$$

Comme il y a au total $n(n-1)/2$ parties, la proportion de parties normales est supérieure à $1/4$.

b) Considérons un tournoi constitué de $2k+1$ groupes de k joueurs (on a donc $n = k(2k+1)$). On suppose que les joueurs du groupe i font match nul entre eux, perdent contre les joueurs des groupes $i+1, \dots, i+k$ et gagnent tous les autres matchs (ici, i est pris modulo k). Alors tous les joueurs ont le même score.

On va modifier les parties des joueurs du $k+1$-ième groupe afin que les scores soient différents. Pour tout i, on remplace ik victoires de joueurs du $(k+1)$-ième groupe contre des joueurs du $(k+1-i)$-ème groupe par des matchs nuls, de sorte que chaque joueur du $(k+1)$-ième groupe voie son score décroître de $i/2$ tandis que chaque joueur du $(k+1-i)$-ème score voie son score augmenter de $i/2$.

De même, on remplace ik défaites du $(k+1)$-ième groupe contre les $(k+1+i)$-ème groupe par des matchs nuls.

Alors les premières places dans le tournoi sont prises par les joueurs du premier groupe, puis du deuxième, etc.

Les joueurs des groupes $i \leqslant k$ ont perdu $k^3 - ik$ parties, les joueurs des groupes $i > k+1$ perdu $(2k+1-i)k^2$ parties anormales, et les joueurs du $(k+1)$-ième groupe ont perdu $k^3 - k(\frac{1}{2}k(k+1))$ parties anormales. Tous calculs faits, on obtient en tout

$$\frac{3}{2}k^4 - \frac{1}{2}k^3 - k^2$$

parties anormales.

Il y a au total $k(2k+1)(k(2k+1)-1)/2$ parties. On vérifie que pour $k = 100$, la proportion de parties anormales dépasse 70%.

Exercice 8. Soient a et b deux entiers tels que $a+b$ n'est pas divisible par 3. Montrer que l'on ne peut pas colorier les entiers relatifs en trois couleurs de sorte que que pour tout entier n, les trois nombres $n, n+a$ et $n+b$ soient de couleurs différentes.

Solution de l'exercice 8 Supposons par l'absurde qu'il existe un tel coloriage. On notera $x \sim y$ si x et y sont de la même couleur.

Pour tout n, les entiers $(n+a)+b$ et $x+a$ ne sont pas de la même couleur, et de même $n+a+b$ n'est pas de la même couleur que $n+b$, donc $n+a+b \sim n$. Il vient immédiatement $0 \sim p(a+b)$ pour tout entier p, et en particulier $0 \sim a(a+b)$.

D'autre part, $n+a$, $n+2a$ et $n+a+b$ sont de couleurs différentes, donc n, $n+a$ et $n+2a$ sont de couleurs différentes. En appliquant ce qui précède à $n+a$, on en déduit que $n+3a$ est de même couleur que n, donc pour tout entier j, le nombre ja est de la même couleur que ra où r est le reste de la division Euclidienne de j par 3.

En appliquant ceci à $j = a+b$, on en déduit que $0 \sim ra$ où r est le reste de la division Euclidienne de $a+b$ par 3, ce qui est impossible puisque 0, a et $2a$ sont de couleurs différentes et $r \in \{1, 2\}$.

Exercice 9. Dans tout l'exercice, on s'intéresse à des tableaux 5×5, dont les lignes (resp. les colonnes) sont notées L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 du bas vers le haut (resp. C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, de gauche à droite).

Dans chacune des 25 cases d'un tel tableau, on écrit un nombre. Le nombre qui est dans la case située sur la ligne L_i et la colonne C_j est noté $f(i, j)$.

Un tableau est dit *cohérent* lorsque, pour tous i et j :

Le nombre $f(i,j)$ est le nombre de i écrits dans les cases de la ligne L_j.

Déterminer tous les tableaux cohérents de taille 5×5.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On se donne un éventuel tableau cohérent. Commençons par dégager quelques unes de ses propriétés.

a) Pour tous i, j, on a $f(i,j) \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

En effet, dans un tableau cohérent, chaque $f(i,j)$ représente le nombre de fois où i apparaît sur L_j, donc $f(i,j)$ est un entier positif ou nul, et il ne peut dépasser 5 car c'est le nombre total de cases de L_j.

b) On a $f(0,0) \geqslant 1$.

Par l'absurde : Si $f(0,0) = 0$ alors, il n'y a aucun 0 sur L_0. Mais, $f(0,0)$ est lui-même sur L_0. Contradiction.

Ainsi, $f(0,0) \geqslant 1$.

Pour tout i (resp. j), on note x_i (resp. y_j) la somme des nombres inscrits dans la colonne C_i (resp. la ligne L_j).

c) On a $x_i \leqslant 5$ pour tout i.

Soit i fixé. Pour tout j, on note n_j le nombre de j dans L_i. Alors :

$$\begin{aligned} x_i &= f(0,i) + f(1,i) + f(2,i) + f(3,i) + f(4,i) \\ &= n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \\ &\leqslant \text{nombre de cases de } L_i \text{ (il pourrait y avoir un } 5 \text{ sur } L_i) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $x_i \leqslant 5$, pour tout i.

d) Pour tous i et j, on a $f(i,j) \leqslant 4$.

Par l'absurde : supposons qu'il existe i et j tels que $f(i,j) \geqslant 5$.

D'après a), c'est donc que $f(i,j) = 5$. Cela signifie que la ligne L_j ne contient que des i. En particulier, on a $f(j,j) = i$.

Si $i > 0$, la ligne L_j doit donc contenir au moins un j. Comme elle ne contient que des i, c'est que $i = j$ et que $5 = f(i,j) = f(j,j) = i$, en contradiction avec $i \leqslant 4$.

Ainsi, on a $i = 0$ et il n'y a que des 0 sur la ligne L_j. Puisque $x_j \leqslant 5$, il n'y a que des 0 sur C_j sauf $f(0,j) = 5$. En particulier, chaque ligne L_k contient au moins un 0 pour $k > 0$. Cela assure que $f(0,k) \neq 0$ pour tout $k > 0$. Mais, on a vu que $f(0,0) > 0$ donc il doit y avoir au moins un 0 sur L_0, alors qu'on vient de prouver qu'aucun des nombres sur L_0 n'est égal à 0. Contradiction.

Finalement, on a $f(i,j) \leqslant 4$, pour tous i et j.

e) On a $x_i = 5$ pour tout i.

Maintenant que l'on sait qu'il n'y a pas de 5 dans le tableau, on reprend le calcul et raisonnement du c), mais il n'y a plus d'inégalité...

Ainsi, on a $x_i = 5$ pour tout i.

f) On a $y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 = 25$.

Il suffit de remarquer que, pour tout i, le nombre y_i est le nombre de i qui apparaîssent dans le tableau. Donc $0y_0 + y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5$ est la somme de tous les nombres du tableau, et on a $y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$.

g) On a $f(0,1) = 0$ et $f(0,i) \geqslant 1$ pour tout $i \geqslant 2$.

Par l'absurde : Supposons qu'il existe $i \geqslant 3$ tel que $f(0,i) = 0$.

Alors, il n'y a aucun 0 sur L_i, ce qui entraine que chaque ligne contient au moins un i. Alors, on a $y_j \geqslant i \geqslant 3$.

D'après f), il vient alors $25 \geqslant (0+1+2+3+4) \times 3 = 30$. Contradiction.

Ainsi, on a $f(0,3) > 0$ et $f(0,4) > 0$.

Par l'absurde : Supposons que $f(0,2) = 0$.

Comme ci-dessus, cela signifie que chaque ligne contient au moins un 2. Mais alors, chacun des nombres $0, 1, 3, 4$ (2 aussi, mais il va avoir un traitement particulier) apparaît au moins deux fois dans le tableau, d'où $y_i \geqslant 2$ pour $i = 0, 1, 3, 4$.

D'autre part, il y a 5 cases sur L_2, aucune ne contenant 0 et au moins une contenant un 2, d'où $y_2 \geqslant 6$. En utilisant f), il vient

$25 \geqslant (0+1+3+4) \times 2 + 2 \times 6 = 28$. Contradiction.

Par suite, on a $f(0,2) > 0$.

Or, on a vu que $f(0,0) > 0$ et donc qu'il y a au moins un 0 sur L_0. Comme $f(0,i) > 0$ pour tout $i \neq 1$, c'est que $f(0,1) = 0$.

Finalement, on a $f(0,1) = 0$ et $f(0,i) \geqslant 1$ pour tout $i \geqslant 2$.

Il n'y a donc qu'un seul nombre non nul sur L_0, d'où $f(0,0) = 1$.

h) On a $y_1 \geqslant 8$.

Puisque $f(0,1) = 0$, il n'y a aucun 0 sur L_1. En particulier, $f(1,1) \geqslant 1$ donc il y a au moins un 1 sur L_1.

- Il ne peut y avoir que des 1 sur L_1, car alors $f(1,1) = 1$ et $f(1,1) = 5$, ce qui est impossible.
- S'il y a quatre 1, on a $f(1,1) = 4$ et tous les autres sont des 1, d'où $y_1 = 8$.
- S'il y a trois 1, alors $f(1,1) = 3$ et un autre des nombres est supérieur ou égal à 2, donc $y_1 \geqslant 3+1+1+1+2 = 8$.
- S'il y a deux 1, le même raisonnement conduit à $y_1 \geqslant 2+1+1+2+2 = 8$.
- S'il n'y a qu'un seul 1, alors c'est $f(1,1) = 1$ et les autres sont supérieurs ou égaux à 2, donc $y_1 \geqslant 1 + 4 \times 2 = 9$.

Ainsi, on a $y_1 \geqslant 8$.

i) On a $f(4,2) = f(4,3) = f(4,4) = 0$, et donc que $f(0,4) \geqslant 3$.

Il n'y a aucun 0 dans L_1 donc chaque ligne contient au moins un 1.

Par l'absurde : supposons qu'il y ait un 4 sur L_2, L_3 ou L_4.

- S'il y a un 4 sur L_4, comme il y a aussi au moins un 1, on a $y_4 \geqslant 5$. Compte-tenu de $y_1 \geqslant 8$, la formule du f) conduit à $25 \geqslant 28$, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas de 4 sur L_4.
- S'il y a un 4 sur L_3, comme il y a aussi au moins un 1, on a $y_3 \geqslant 5$. Compte-tenu de $y_1 \geqslant 8$ et $y_4 \geqslant 1$, la formule du f) conduit à $25 \geqslant 27$, ce qui est encore impossible. Il n'y a donc pas de 4 sur L_3.

- S'il y a un 4 sur L_2 : dans chaque colonne, sauf C_1, les lignes L_0 et L_1 ont toutes les deux un nombre non nul. Or, la somme des termes d'une colonne vaut 5 d'après e), donc le 4 de L_2 ne peut être que dans C_1, c'est-à-dire $f(2,1) = 4$. Il y a donc quatre 2 dans L_1, d'où $y_1 \geqslant 9$. Comme on a $y_2 \geqslant 5, y_3 \geqslant 1$ et $y_4 \geqslant 1$, la formule du f) conduit à $25 \geqslant 26$, ce qui est encore impossible. Il n'y a donc pas de 4 sur L_3.

Finalement, il n'y a aucun 4 dans les cases des lignes L_2, L_3 et L_4.

Cela prouve que $f(4,2) = f(4,3) = f(4,4) = 0$, et donc que $f(0,4) \geqslant 3$.

j) On a $f(3,2) = f(3,3) = f(3,4) = 0$, et donc que $f(0,3) \geqslant 3$.
Par l'absurde : supposons qu'il y ait un 3 dans les lignes L_2, L_3 ou L_4.
- S'il y a un 3 sur L_4, compte-tenu des 1 sur chaque ligne et de h), on a $y_4 \geqslant 4$ et $y_1 \geqslant 8$. Comme au i), la formule du f) conduit alors à une contradiction. Il n'y a donc pas de 3 sur L_4.
- S'il y a un 3 sur L_3, compte-tenu des 1 sur chaque ligne et de h), on a cette fois $y_4 \geqslant 1, y_3 \geqslant 4, y_2 \geqslant 1$ et $y_1 \geqslant 8$. Comme au i), la formule du f) conduit alors à une contradiction. Il n'y a donc pas de 3 sur L_3.
- S'il y a un 3 sur L_2 : notons que l'on a $f(0,4) \geqslant 3$ et $f(1,4) \geqslant 1$. Puisque $x_4 = 5$, il est impossible que $f(2,4) = 3$.
De même pour C_3, comme $f(0,3) \geqslant 2$ et $f(1,3) \geqslant 1$, on ne peut avoir $f(2,3) = 3$.
Si $f(2,2) = 3$ alors $y_2 \geqslant 7$. Avec $y_4 \geqslant 1, y_3 \geqslant 1$ et $y_1 \geqslant 8$, on obtient le même type de contradiction que ci-dessus par utilisation de c).
Si $f(2,0) = 3$ alors, puisque $f(0,0) = 1$ et $f(0,1) = 0$, la ligne L_0 est déterminée et, en particulier, on a $f(0,4) = 2$, en contradiction avec les trois 0 que l'on a déjà identifiés sur L_4.
Reste à étudier le cas $f(2,1) = 3$.
On sait que $y_4 \geqslant 1, y_3 \geqslant 1, y_2 \geqslant 4$ et $y_1 \geqslant 8$. En l'état, le f) n'apporte pas de contradiction, mais permet de voir que si $y_4 \geqslant 2$ ou $y_3 \geqslant 2$, on en obtiendrait une. Donc, on doit avoir $y_4 = y_3 = 1$, ce qui permet de remplir L_3 et donc C_3, et de savoir que $f(0,3) = f(0,4) = 4$ ainsi que $f(1,4) = f(1,3) = 1$. Comme $x_4 = x_3 = 5$, les colonnes C_3 et C_4 sont complètes. Les trois 2 sur L_1 permettent de compléter L_1 et donc C_1. Ces mêmes 2 sur L_1 permettent aussi de remplir les trous sur L_0 et L_2 et de finir de remplir le tableau. On obtient

1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
1	3	1	0	0
2	2	2	1	1
1	0	1	4	4

En particulier, on a $f(2,0) = 1$ et pas de 2 sur L_0. Contradiction.

Finalement, il n'y a aucun 3 dans les cases des lignes L_2, L_3 et L_4.

Cela prouve que $f(3,2) = f(3,3) = f(3,4) = 0$, et donc que $f(0,3) \geqslant 3$.

k) On trouve tous les tableaux cohérents.

D'après ce qui précède, on part d'un tableau de la forme

.	.	0	0	0
.	.	0	0	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
1	0	.	a	b

avec $a, b \geqslant 3$, et aucun terme nul sur L_1. Comme $a, b \in \{3,4\}$ et que la somme par colonne doit toujours donner 5, on tombe assez rapidement sur les deux seuls tableaux cohérents, à savoir :

1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
0	1	0	1	0
1	3	2	1	1
1	0	3	3	4

2	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1
1	4	1	1	1
1	0	4	4	3

Remarque. Pour information, en affinant un peu ce qui précède, on peut prouver qu'il n'existe de tableau $n \times n$ cohérent que pour $n = 5$.