Olympiades Françaises de Mathématiques 2014-2015

Envoi Numéro 4

À renvoyer au plus tard le samedi 14 février

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2000 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2013-2014 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit a, b et c des réels tels que

$$|a-b| \geqslant |c|,\ |b-c| \geqslant |a| \text{ et } |c-a| \geqslant |b|.$$

Prouver que l'un des trois nombres a, b et c est la somme des deux autres.

Exercice 2. Déterminer tous les nombres irrationnels x pour lesquels les deux nombres x^2+x et x^3+2x^2 sont des entiers.

Exercice 3. Soit x un réel strictement positif tel que $x^5 - x^3 + x \geqslant 3$. Prouver que $x^6 \geqslant 5$.

Exercice 4. Déterminer tous les réels t pour lesquels le polynôme

$$P(x) = x^3 + 3tx^2 + (4t-1)x + t$$

possède deux racines réelles dont la différence est égale à 1.

Exercices communs

Exercice 5. D éterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ telles

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m$$

pour tous les entiers m et n.

Exercice 6. Soit P un polynôme à coefficients entiers, de degré n, avec $n \leqslant 10$. On suppose que $|P(10) - P(0)| < 1000$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, 10\}$, il existe un entier m tel que $P(m) = k$. Montrer que, pour tout entier k il existe un entier m tel que $P(m) = k$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit $n \geqslant 0$ un entier, et $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ des réels strictement positifs tels que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} x_i = 1$.

Prouver que

$$\sqrt[x_1]{n} + \sqrt[x_2]{n} + \cdots + \sqrt[x_{n+1}]{n} \geqslant n^{\sqrt[n]{x_1}} + n^{\sqrt[n]{x_2}} + \cdots + n^{\sqrt[n]{x_{n+1}}}.$$

Exercice 8. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \longmapsto \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 9. Soit $a \in]0;1[$ et $n > 0$ un entier. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + \frac{x^2}{n}$, pour tout réel x. Prouver que

$$\frac{a(1-a)n^2 + 2a^2n + a^3}{(1-a)^2n^2 + a(2-a)n + a^2} < \underbrace{(f_n \circ f_n \circ \cdots \circ f_n)}_{n}(a) < \frac{an + a^2}{(1-a)n + a}.$$

Exercice 10. Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers pour lesquels l'ensemble $P(\mathbb{N})$ contient une suite géométrique infinie de raison a avec $a \notin \{-1, 0, 1\}$ et de premier terme non nul.