Exercice 1.

Soit a, b et c des réels tels que

$$|a-b| \geq |c|, \ \ |b-c| \geq |a| \text{ et } |c-a| \geq |b|.$$

Prouver que l'un des trois nombres a, b et c est la somme des deux autres.

Solution.

La première inégalité s'écrit $(a-b)^2 \geq c^2$, ou encore $(a-b+c)(a-b-c) \geq 0$. De même, les deux autre inégalités conduisent à $(b-c+a)(b-c-a) \geq 0$ et $(c-a+b)(c-a-b) \geq 0$.

En multipliant membre à membre ces trois inégalités, il vient

$$(a-b+c)^2(-a+b+c)^2(a+b-c)^2 \leq 0.$$

Or, un carré étant toujours positif, c'est donc que l'un des facteurs est nul, ce qui conclut.

Solution alternative.

Les variables a, b et c jouent des rôles symétriques. En outre, le problème est invariant si on change simultanément les signes de a, b et c. Ainsi, il y a au moins deux variables parmi a, b et c qui ont le même signe ; on peut donc supposer, sans perte de généralité, que l'on est dans un des deux cas $a \geq b \geq c \geq 0$ ou $a \geq b \geq 0 \geq c$.

Montrons que la relation $b = a+c$ est vraie dans les deux cas, ce qui conclura le problème.

1. Si $a \geq b \geq c \geq 0$, alors $b \geq b-c = |b-c| \geq |a| = a$; chaque inégalité est donc une égalité, d'où la relation $b = b-c = |b-c| = |a| = a$.
2. Si $a \geq b \geq 0 \geq c$, alors $b-c = |b-c| \geq |a| = a$ et $a-b = |a-b| \geq |c| = -c$, d'où la relation $a+c \geq b \geq a+c$.

Exercice 2.

Déterminer tous les nombres irrationnels x pour lesquels les deux nombres $x^2 + x$ et $x^3 + 2x^2$ sont des entiers.

Solution.

Soit x un nombre irrationnel pour lequel les deux nombres $x^2 + x$ et $x^3 + 2x^2$ sont des entiers.

On pose $x^2 + x = a$ et $x^3 + 2x^2 = b$, où a et b sont des entiers. Alors $b - ax = x^2 = a - x$, et ainsi $x(a-1) = b - a$. Si $a - 1 \neq 0$, on aurait $x = \frac{b-a}{a-1}$, et x serait rationnel, en contradiction avec l'énoncé.

Par suite, on a $a = 1$ et donc $b = a = 1$. Mais alors $x^2 + x - 1 = 0$ et $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$. On note que, si $x^2 + x - 1 = 0$, alors $x^3 = -x^2 + x$ et $x = -x^2 + 1$, d'où $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$.

Ainsi, les solutions du problème sont les solutions irrationnelles de l'équation du second degré $x^2 + x - 1 = 0$, c'est-à-dire les nombres $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel, ces deux nombres sont effectivement des solutions du problème.

Exercice 3.

Soit x un réel strictement positif tel que $x^5 - x^3 + x \geq 3$. Prouver que $x^6 \geq 5$.

Solution.

La clé du problème est la factorisation $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$, valable pour tout réel x.

Soit $x > 0$ tel que $x^5 - x^3 + x \geq 3$. D'après l'identité ci-dessus, on a alors

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = \frac{x^2 + 1}{x}(x^5 - x^3 + x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)(x^5 - x^3 + x)$$

et donc $x^6 + 1 \geq 3(x + \frac{1}{x})$.

Or, d'après l'inégalité arithmético-géométrique (IAG), on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$, d'où $x^6 + 1 \geq 6$, et ainsi $x^6 \geq 5$, comme souhaité.

Exercice 4.

Déterminer tous les réels t pour lesquels le polynôme

$$P(x) = x^3 + 3tx^2 + (4t-1)x + t$$

possède deux racines réelles dont la différence est égale à 1.

Solution.

Si t est un réel fixé, on pose $P_t(x) = x^3 + 3tx^2 + (4t-1)x + t$.

La première chose à remarquer est que, pour tout t, on a $P_t(-1) = 0$. Par suite, -1 est une racine du polynôme P_t, ce qui assure que $P_t(x)$ est factorisable par $x+1$. On trouve ainsi que

$$P_t(x) = (x+1)(x^2 + (3t-1)x + t)$$

pour tout réels x et t.

Soit t un réel pour lequel P_t possède deux racines réelles dont la différence est égale à 1, disons a et $a+1$.

- Si $a = -1$: il faut et il suffit que 0 soit également une racine de P_t. Comme $P_t(0) = t$, cela signifie que $t = 0$.
- Si $a + 1 = -1$, il faut et il suffit que -2 soit également une racine de P_t. Comme $P_t(-2) = 5t - 6$, cela signifie que $t = \frac{6}{5}$.
- Si -1 n'est ni a ni $a+1$, c'est donc que a et $a+1$ sont les racines de $x^2+(3t-1)x+t$. On a donc $a^2+(3t-1)a+t = 0$ et $(a+1)^2+(3t-1)(a+1)+t = 0$. Par soustraction, il vient $2a + 1 + 3t - 1 = 0$, soit donc $a = -\frac{3t}{2}$. En reportant dans la première équation ci-dessus, il vient alors $-9t^2 + 10t = 0$, soit $t = 0$ ou $t = \frac{10}{9}$.

Réciproquement, on a déjà vu que $t = 0$ convenait et, pour $t = \frac{10}{9}$, les racines de P_t sont $-1, -\frac{2}{3}$ et $-\frac{5}{3}$, ce qui prouve que $t = \frac{10}{9}$ est bien une solution du problème.

Finalement, les réels t cherchés sont $\frac{10}{9}, \frac{6}{5}$ et 0.

Exercice 5 (Vietnam 2014).

D éterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ telles

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m$$

pour tous les entiers m et n.

Solution.

Soit f une éventuelle solution. On note $\mathbf{E}_{x,y}$ l'égalité de l'énoncé.

Posons $a = f(0)$. L'égalité $\mathbf{E}_{x,0}$ indique que $f\left(2x + (1 + a)f(x)\right) = x$, ce qui montre que f est surjective. Puis, en choisissant un entier b tel que $f(b) = -1$, l'égalité $\mathbf{E}_{b,y}$ indique que $f\left(2b + 1 - f(y)\right) = b - y$, ce qui montre que f est injective, donc bijective.

Les égalités $\mathbf{E}_{b,b}$ et $\mathbf{E}_{0,0}$ indiquent respectivement que $f(2b) = 0$ et que $f(a + a^2) = 0$. Il s'ensuit que $2b = a + a^2$. De surcroît, l'égalité $\mathbf{E}_{ab,0}$ indique que $f(0) = ab$, c'est-à-dire $0 = a(a - 1)(a + 2)$. Ainsi, $a \in \{-2, 0, 1\}$.

Enfin, les égalités $\mathbf{E}_{0,y}$ et $\mathbf{E}_{ay,0}$ indiquent respectivement que $f(af(y) + a) = ay$ et que $f\left(2ay + (a + 1)f(ay)\right) = ay$. Il s'ensuit que $af(y) + a = 2ay + (a + 1)f(ay)$, égalité que l'on note ($\spadesuit$).

- Si $a = 1$, alors l'égalité ($\spadesuit$) indique que $f(y) + 1 = 2y + 2f(y)$. Il s'ensuit que $f : y \mapsto 1 - 2y$, qui n'est manifestement pas bijective.
- Si $a = 0$, alors $b = 0$, et l'égalité $\mathbf{E}_{x,0}$ indique que $f(2x) = x$. Cela prouve que f n'est pas injective, puisque chaque entier a déjà un antécédent pair.
- Si $a = -2$, alors $b = 1$, et l'égalité ($\spadesuit$) indique que $-2f(y) - 2 = -4y - f(-2y)$. Or, l'égalité $\mathbf{E}_{x,1}$ indique que $f(2x) = f(x) + x$. En combinant ces deux égalités, on en déduit que $f(-x) - x = f(-2x) = 2f(x) + 2 - 4x$, donc que $f(-x) = 2f(x) + 2 - 3x$. De manière symétrique, on sait que $f(x) = 2f(-x) + 2 + 3x$, d'où la relation $f : x \mapsto x - 2$.

Réciproquement, il on vérifie aisément que la fonction $f : n \longmapsto n - 2$ est bien une solution du problème : c'en est donc l'unique solution.

Exercice 6 (Pays-Bas 2014).

Soit P un polynôme à coefficients entiers, de degré n, avec $n \leq 10$. On suppose que $|P(10) - P(0)| < 1000$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, 10\}$, il existe un entier m tel que $P(m) = k$. Montrer que, pour tout entier k il existe un entier m tel que $P(m) = k$.

Solution.

Pour $i \in \{1, \ldots, 10\}$, on désigne par c_i un entier tel que $P(c_i) = i$. Pour $i \in \{1, \ldots, 9\}$, puisque P est à coefficients entiers, l'entier $c_{i+1} - c_i$ divise $P(c_{i+1}) - P(c_i) = i+1-i = 1$, d'où $c_{i+1} - c_i = \pm 1$. De plus, pour $i, j \in \{1, \ldots, 10\}$ distincts, on a $P(c_i) = i \neq j = P(c_j)$, donc $c_i \neq c_j$. Ainsi, $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ sont, dans cet ordre, dix entiers consécutifs.

Quitte à étudier le polynôme $P(10-X)$ plutôt que le polynôme $P(X)$ lui-même, on peut supposer que $c_1 < c_2 < \cdots < c_{10}$: on a donc $c_i = c_1 + i - 1$. Soit alors les polynômes $Q(X) = X + 1 - c_1$ et $R(X) = P(X) - Q(X)$. Le polynôme Q est affine, donc de degré 1, et R est de degré au plus 10.

En outre, pour $i = 1, 2, \ldots, 10$, on a $R(c_i) = P(c_i) - Q(c_i) = i - i = 0$, donc $c_1, \ldots, c_{10}$ sont dix racines distinctes entières du polynôme R, à coefficients entiers. On peut donc factoriser R sous la forme $R(X) = S(X)T(X)$, où $S(X) = \prod_{i=1}^{10}(X - c_i)$ et où T est un polynôme à coefficients entiers. Remarquons que T est de degré au plus 0, ce qui signifie que T est constant : il existe un entier a tel que $R = aS$.

Si $a = 0$, on a bien $P = Q$, donc P est affine de coefficient ± 1 et $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$: on suppose désormais que $a \neq 0$. Notons alors que $S(n) \equiv 0 \pmod{10!}$ pour tout entier n. En effet, soit $k \geq 10$ un entier. Alors

$$S(c_1 + k) = \prod_{i=0}^{9}(k - i) = 10!\binom{k}{10} \equiv 0 \pmod{10!}.$$

La relation $S(c_1 + k) \equiv 0$ est donc vraie dans $\mathbb{Z}/10!\mathbb{Z}$, ce qui signifie bien que $S(n) \equiv 0 \pmod{10!}$ pour tout entier n.

En particulier, il s'ensuit que $R(n) \equiv 0 \pmod{10!}$ pour tout entier n. Or,

$$|R(10) - R(0)| \leq |P(10) - P(0)| + |Q(10) - Q(0)| \leq 1010 < 10!$$

Ainsi, $R(10) = R(0)$, donc $S(10) = S(0)$. Le polynôme S est strictement monotone sur $]-\infty, c_1]$ et sur $[c_{10}, +\infty[$, donc on ne peut avoir ni $10 \leq c_1$ ni $0 \geq c_{10}$. Ainsi, l'un des entiers 0 et 10 doit être une racine de S, mais alors l'autre aussi, ce qui est impossible car les racines de S sont mutuellement distantes d'au plus 9.

Le cas $a \neq 0$ est donc impossible, ce qui conclut le problème.

Exercice 7 (Iran 2014).

Soit $n \geq 0$ un entier, et $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ des réels strictement positifs tels que $\prod_{k=1}^{n+1} x_i = 1$.
Prouver que

$$\sqrt[x_1]{n} + \sqrt[x_2]{n} + \cdots + \sqrt[x_{n+1}]{n} \geq n^{\sqrt[n]{x_1}} + n^{\sqrt[n]{x_2}} + \cdots + n^{\sqrt[n]{x_{n+1}}}.$$

Solution.

Par IAG (deux fois), on a

$$\begin{aligned}
n \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt[x_i]{n} &= \sum_{j=1}^{n+1} \left(\sum_{i \neq j} n^{\frac{1}{x_i}} \right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n+1} \left(n \cdot n^{\frac{1}{n} \sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{x_i}} \right) \\
&\geq \sum_{j=1}^{n+1} n \cdot n^{\sqrt[n]{\prod\limits_{i \neq j} \frac{1}{x_i}}} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} n \cdot n^{\sqrt[n]{x_j}} \text{ car } x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1
\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à diviser par n les premier et dernier membres pour obtenir l'inégalité demandée.

Exercice 8 (Iran 2014).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution.

En cherchant un peu parmi les fonctions usuelles, on constate que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une solution du problème. Nous allons maintenant prouver que c'est la seule.

Soit f une solution du problème. Si $y > 0$ est tel que $yf(y) > 1$, posons $x = \frac{1}{yf(y)-1}$. La relation de l'énoncé donne

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f(y) = f(y),$$

ce qui est impossible car f est à valeurs strictement positives. Ainsi, $yf(y) \leq 1$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a donc

$$f(y) = f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) \leq \frac{f(x+1)}{y} + \frac{xf(y)}{x+1},$$

donc $yf(y) \leq (x+1)f(x+1)$. En particulier, pour tous les réels $a, b > 1$, on a bien $af(a) \leq bf(b) \leq af(a)$: il existe donc un réel $c \in]0,1]$ tel que $xf(x) = c$ pour tout $x > 1$.

Si $y > 1$, alors $y > c$ donc $\frac{y(x+1)}{c} > x+1 > 1$ et $\frac{(x+1)y}{xc} > \frac{y}{c} > 1$, et

$$\begin{aligned} c &= y \cdot f(y) = y \cdot f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + y \cdot f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) \\ &= y \cdot f\left(\frac{(x+1)\cdot y}{c}\right) + y \cdot f\left(\frac{(x+1)\cdot y}{c \cdot x}\right) \\ &= \frac{c^2 \cdot y}{(x+1)\cdot y} + \frac{c^2 \cdot x \cdot y}{(x+1)\cdot y} = c^2, \end{aligned}$$

donc $c = 1$. On a donc $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 1$.

On va maintenant prouver, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 2^{-k}$. Le résultat est déjà connu pour $k = 0$. En outre, si on suppose le résultat connu pour $k \geq 0$, posons $x = 1$. Si $y > 2^{-1-k}$, alors $2y > 2^{-k}$ et $\frac{2}{f(y)} \geq 2y > 2^{-k}$. L'énoncé indique donc que

$$f(y) = f(2y) + f\left(\frac{2}{f(y)}\right) = \frac{1}{2y} + \frac{f(y)}{2},$$

c'est-à-dire $f(y) = \frac{1}{y}$. Le résultat est donc vrai aussi pour $k+1$.

Ceci montre que $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est bien l'unique solution du problème.

Exercice 9.

Soit $a \in]0;1[$ et $n > 0$ un entier. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + \frac{x^2}{n}$, pour tout réel x. Prouver que

$$\frac{a(1-a)n^2 + 2a^2n + a^3}{(1-a)^2n^2 + a(2-a)n + a^2} < \underbrace{(f_n \circ f_n \circ \cdots \circ f_n)}_{n}(a) < \frac{an + a^2}{(1-a)n + a}.$$

Solution.

Pour tout entier $k \geq 0$, posons $a_k = \underbrace{(f_n \circ f_n \circ \cdots \circ f_n)}_{k}(a)$. En particulier, $a_0 = a$.

On remarque que, pour tout $k \geq 0$, on a $a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n} > a_k$, donc la suite (a_k) est strictement croissante. En particulier, $a_k \geq a > 0$ pour tout $k \geq 0$.

De plus, pour tout $k \geq 0$, on a $a_{k+1} = \frac{a_k(a_k+n)}{n}$ et donc

$$\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_k + n}.$$

Ainsi, après sommation de ces égalités pour $k = 0, \ldots, n-1$, on a

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n}.$$

Puisque (a_k) est strictement croissante et à valeurs positives, on a

$$\frac{n}{a_n + n} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_k + n} < \frac{n}{a + n}$$

et ainsi

$$\frac{1}{a} - \frac{n}{a+n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a} - \frac{n}{a_n + n}. \tag{1}$$

L'inégalité de gauche est équivalente à $a_n < \dfrac{an + a^2}{(1-a)n + a}$, ce qui est l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

Reportons maintenant cette dernière inégalité dans l'inégalité de droite de (1). Il vient

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a} - \frac{n}{\frac{an+a^2}{(1-a)n+a} + n}$$

ou encore

$$\frac{a(1-a)n^2 + 2a^2n + a^3}{(1-a)^2n^2 + a(2-a)n + a^2} < a_n,$$

ce qui est l'inégalité de gauche de l'encadrement demandé.

Exercice 10 (Iran 2014).

Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers pour lesquels l'ensemble $P(\mathbb{N})$ contient une suite géométrique infinie de raison a avec $a \notin \{-1, 0, 1\}$ et de premier terme non nul.

Solution.

Tout d'abord, on note que si P est un polynôme ayant les propriétés de l'énoncé, alors $-P$ les possède aussi (il suffit de changer le premier terme de la suite géométrique en son opposé). On peut donc supposer que le coefficient dominant de P est strictement positif.

Soit $(u_k) = (u_0 \cdot a^k)$ une suite géométrique infinie telle que décrite ci-dessus. Alors, quitte à la remplacer par la suite $(u_{2k}) = (u_0 \cdot (a^2)^k)$, on peut supposer que $a > 0$.

De plus, notons que $a = \frac{u_1}{u_0}$ est rationnel. Si a n'est pas entier, soit p un facteur premier tel que la valuation p-adique de a soit strictement négative c'est-à-dire que $v_p(a) \leq -1$. En posant $k = v_p(u_0)$, on constate alors que $v_p(u_{k+1}) \leq -1$, ce qui contredit le fait que u_{k+1} soit entier, donc que $u_{k+1} \in P(\mathbb{N})$. Ainsi, on sait que a est un entier tel que $a > 1$.

Développons alors le polynôme P sous la forme $P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$. Pour tout entier b, on a

$$\begin{aligned} P(ax+b) &= a^n p_n x^n + (n a^{n-1} p_n b + a^{n-1} p_{n-1}) x^{n-1} + \cdots \text{ et} \\ a^n P(x) &= a^n p_n x^n + a^n p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a^n p_0. \end{aligned}$$

Le polynôme $P(ax+b) - a^n P(x)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ et dont le coefficient de degré $n-1$ est $a^{n-1}(np_n b + p_{n-1}(1-a))$. Notons que P est non constant, donc que $np_n > 0$: ce coefficient a donc une expression affine strictement croissante en b. Ainsi, il existe un entier b tel que

$$np_n(b+1) + p_{n-1}(1-a) > 0 > np_n(b-1) + p_{n-1}(1-a).$$

Par conséquent, il existe même un entier $N \geq 0$ tel que

- $P(ax+b-1) < a^n P(x) < P(ax+b+1)$ pour tout $x \geq N$, et
- P est strictement croissante sur $[N, +\infty[$.

En outre, soit M un entier tel que $M \geq N$ et $aM + b - 1 \geq N$: quitte à considérer une suite $(u_{k+\ell}) = (u_\ell \cdot a^k)$ au lieu de la suite (u_k), on peut supposer que $|u_0| > \sum_{i=0}^{M} |P(i)|$. Pour tout entier $k \geq 0$, il existe donc un entier $v_k > M$ tel que $P(v_k) = u_k = u_0 \cdot a^k$.

En particulier, notons que

$$P(av_k + b - 1) < a^n P(v_k) = P(v_{k+n}) < P(av_k + b + 1),$$

donc que $v_{k+n} = av_k + b$ et que $a^n P(v_k) = P(av_k + b)$. Ainsi, chaque entier v_k est une racine du polynôme $a^n P(X) - P(aX + b)$, qui est donc nul. On a donc l'égalité de polynômes $a^n P(X) = P(aX + b)$.

Puisque P est non constant, soit r une racine de P. On pose alors

$$\delta = \frac{b}{1-a} \quad \text{et} \quad \rho_k = a^k (r - \delta) + \delta.$$

Alors $\rho_0 = r$ et $\rho_{k+1} = a(\rho_k - \delta) + \delta = a\rho_k + b$. Une récurrence immédiate montre donc que tous les termes ρ_k sont des racines de P.

Or, si $r \neq \delta$, les termes ρ_k sont deux à deux distincts, et P se retrouve être nul, ce qui est impossible. donc $r = \delta$ est nécessairement la seule racine de P, de sorte que l'on peut écrire $P(X) = p_n (X - \delta)^n$. Puisque $P(X) = p_n X^n - np_n\delta X^{n-1} + \cdots + (-1)^n p_n \delta^n$ est à coefficients entiers, alors $np_n\delta$ est entier, donc δ est rationnel, et peut s'écrire sous forme irréductible $\delta = \frac{u}{v}$. Puis $p_n\delta^n$ est entier, donc v^n divise p_n, et l'on peut factoriser p_n sous la forme $p_n = wv^n$. On peut alors réécrire $P(X) = w\,(vX - u)^n$, avec n, u, v et w entiers et $n \geq 1$, $v \neq 0$, $w \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $P(X) = w\,(vX - u)^n$ avec n, u, v et w entiers et $n \geq 1$, $v \neq 0$, $w \neq 0$.

- Si $u = 0$, alors $P(2^k) = v^n \cdot w \cdot 2^{kn}$ décrit bien une suite géométrique de raison $2^n \notin \{-1, 0, 1\}$ et de premier terme $P(1) = v^n \cdot w$ non nul.
- Si $u \cdot v > 0$, on pose $x_k = (3uv - 1)^{2k+1} + 1$ et $y_k = \frac{u}{v} x_k$. Alors $x_k \equiv 0 \pmod{v}$, de sorte que $y_k \in \mathbb{N}$. En outre, $P(y_k) = w \cdot u^n \cdot (3uv - 1)^{(2k+1)n}$ décrit bien une suite géométrique de raison $(3uv - 1)^{2n} \notin \{-1, 0, 1\}$ et de premier terme $P(3u^2) = w \cdot u^n \cdot (3uv - 1)^n$ non nul.
- Si $u \cdot v < 0$, on pose $x_k = 1 - (3uv + 1)^{2k}$ et $y_k = \frac{u}{v} x_k$. Alors $x_k \equiv 0 \pmod{v}$, de sorte que $y_k \in \mathbb{N}$. En outre, $P(y_k) = w \cdot (-u)^n \cdot (3uv + 1)^{(2k)n}$ décrit bien une suite géométrique de raison $(3uv+1)^{2n} \notin \{-1, 0, 1\}$ et de premier terme $P(0) = w \cdot (-u)^n$ non nul.

Les polynômes recherchés sont donc exactement ceux de la forme $P(x) = w(vx + u)^n$, avec n, u, v et w des entiers tels que $n > 0$, $v \neq 0$ et $w \neq 0$.