Olympiades Françaises de Mathématiques 2014-2015

Envoi Numéro 3

À renvoyer au plus tard le jeudi 15 janvier

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2000 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2013-2014 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que le quotient de 2^n par n est une puissance de 2. Montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 2. Trouver tous les entiers strictement positifs m et n tels que

$$3 \cdot 2^m + 1 = n^2.$$

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que pour tout entier $a \geqslant 1$, si $a^n - 1$ est divisible par p, alors $a^n - 1$ est aussi divisible par p^2.

Exercices communs

Exercice 4. Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (a, b, c) tels que $6^a = 1 + 2^b + 3^c$.

Exercice 5. Soit n l'entier $4 \times 201420142014....2014$ (où 2014 est écrit 117819 fois). Montrer que 2014^3 divise n.

Exercice 6. Soient m et n deux entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant 2n$. Prouver que le nombre entier

$$2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$$

est un carré parfait si, et seulement si, $m = n$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Montrer qu'il existe une infinité de nombres entiers strictement positifs a tels que a^2 divise $2^a + 3^a$.

Exercice 8. Soient $m, n \geqslant 1$ deux entiers impairs tels que m divise $n^2 + 2$ et n divise $m^2 + 2$. Prouver que m et n sont tous les deux des termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$u_1 = u_2 = 1, \qquad u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \qquad \text{si } n \geqslant 3.$$

Exercice 9. Trouver tous les entiers strictement positifs a tels que l'entier

$$1 - 8 \cdot 3^a + 2^{a+2}(2^a - 1)$$

soit un carré parfait.