OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

ENVOI NO. 3

CORRIGÉ

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que le quotient de 2^n par n est une puissance de 2. Montrer que n est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 1 Par hypothèse, $2^n/n$ est une puissance de 2 (ici, on parle bien de quotient, et non pas de quotient *dans la division euclidienne*). Il existe donc un entier $k \geqslant 0$ tel que $2^n = 2^k n$. Ainsi, $n = 2^{n-k}$, de sorte que n est bien une puissance de 2.

Exercice 2. Trouver tous les entiers strictement positifs m et n tels que

$$3 \cdot 2^m + 1 = n^2.$$

Solution de l'exercice 2 Remarquons tout d'abord que la condition se réécrit $3 \cdot 2^m = (n-1)(n+1)$.

▷ Si n est pair, les entiers $(n+1)$ et $(n-1)$ sont premiers entre eux donc égaux à 2^m et 3 ou à $3 \cdot 2^m$ et 1. Or, ils sont tous les deux impairs (et $m > 0$) : contradiction.

▷ Si n est impair, le pgcd de $(n+1)$ et $(n-1)$ est le pgcd de $(n+1)$ et $n+1-(n-1) = 2$ donc 2. Ainsi, ils sont égaux à 6 et 2^{m-1}, ou bien à 2 et $3 \cdot 2^{m-1}$.

- Si $n - 1 = 6$, alors $n = 7$ et $2^{m-1} = n + 1 = 8$ d'où $m = 4$.
- Si $n + 1 = 6$, alors $n = 5$ et $2^{m-1} = n - 1 = 4$ d'où $m = 3$.
- Si $n - 1 = 2$ alors $n = 3$ et $3 \cdot 2^m = n^2 - 1 = 8$, ce qui est impossible car 3 ne divise pas 8.
- Si $n + 1 = 2$ alors $n = 1$ et $3 \cdot 2^m = n^2 - 1 = 0$, ce qui est impossible.

En conclusion, l'équation n'est vérifiée que pour les couples $(m, n) \in \{(4, 7), (3, 5)\}$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que pour tout entier $a \geqslant 1$, si $a^n - 1$ est divisible par p, alors $a^n - 1$ est aussi divisible par p^2.

Solution de l'exercice 3 Montrons que les entiers n qui conviennent sont exactement les multiples de p. Pour cela, nous allons d'abord prouver que lorsque $n = pm$ pour un entier $m \geqslant 1$, pour tout entier $a \geqslant 1$, si $a^n - 1$ est divisible par p, alors $a^n - 1$ est aussi divisible par p^2. Puis, réciproquement, nous allons prouver que si p ne divise pas n, alors il existe un entier $a \geqslant 1$ tel que $a^n - 1$ est divisible par p mais tel que $a^n - 1$ n'est pas divisible par p^2.

▷ Si $n = pm$ pour un entier $m \geqslant 1$, alors $a^n = a^{pm} \equiv a^m \pmod p$ d'après le petit théorème de Fermat pour tout entier a. Supposons dorénavant que l'entier a est tel que $a^n - 1$ est divisible par p. D'après la ligne ci-dessus, $a^m - 1$ est divisible par p. Par ailleurs, la factorisation suivante est vérifiée :

$$a^n - 1 = a^{pm} - 1 = (a^m - 1)(1 + a^m + \cdots + a^{(p-1)m}).$$

Comme p divise $a^m - 1$, $a^m \equiv 1 \pmod p$ donc

$$1 + a^m + \cdots + a^{(p-1)m} \quad \equiv \quad 1 + 1 + \cdots + 1 \quad \equiv \quad p \quad \equiv \quad 0 \qquad \pmod p.$$

En conclusion, $a^n - 1$ est le produit de deux entiers divisibles par p donc est divisible par p^2.

▷ Si p ne divise pas n, alors avec l'entier $a = p + 1$, on a que $a^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod p$ donc p divise $a^n - 1$. Or

$$1 + a + \cdots + a^{(n-1)} \quad \equiv \quad 1 + 1 + \cdots + 1^{n-1} \quad \equiv \quad n \quad \not\equiv \quad 0 \pmod p.$$

Ainsi, p ne divise pas $1 + a + \cdots + a^{(n-1)}$, et donc p^2 ne divise pas $p(1 + a + \cdots + a^{(n-1)}) = (a-1)(1 + a + \cdots + a^{(n-1)}) = a^n - 1$.

Exercices communs

Exercice 4. Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (a, b, c) tels que $6^a = 1+2^b+3^c$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Remarquons tout d'abord que 3 divise 2^b+1 donc b est impair (car $2^b+1 \equiv (-1)^b+1 \pmod 3$).

▷ Si $b = 1$, l'équation se réécrit $1+3^{c-1} = 2 \cdot 6^{a-1}$ en divisant par 3.

– Si $a > 1$, alors 3 divise $1+3^{c-1}$ ce qui est impossible.

– Sinon, $a = 1$ et par conséquent $c = 1$.

▷ Si $b \geqslant 3$, alors $a \geqslant 2$ (car $6 < 1+2^3$). En réduisant modulo 4, on obtient la condition nécessaire $1+3^c \equiv 0 \pmod 4$, et donc c est impair. En réduisant alors modulo 8, on obtient la nouvelle condition $1+2^b+3^c \equiv 1+0+3 \pmod 8 \equiv 4 \pmod 8$ donc $6^a \equiv 4 \pmod 8$ ce qui entraîne immédiatement $a = 2$ (en effet, pour $6^a \equiv 0 \pmod 8$ pour $a \geqslant 3$). L'équation initiale devient alors $2^b+3^c = 35$ et une étude exhaustive donne $b = 3$ et $c = 3$ ou $b = 5$ et $c = 1$.

En conclusion, les triplets solutions sont $(a, b, c) \in \{(1, 1, 1), (2, 3, 3), (2, 5, 1)\}$.

Exercice 5. Soit n l'entier $4 \times 201420142014 \ldots .2014$ (où 2014 est écrit 117819 fois). Montrer que 2014^3 divise n.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On peut écrire

$$4 \times 201420142014 \ldots 2014 = 4 \cdot 2014 \cdot \frac{10^{4 \cdot 117819}-1}{10^4-1}.$$

Comme $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ et $10^4-1 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$ sont premiers entre eux, il suffit de montrer que 19^2 et 53^2 divisent $10^{4 \cdot 117819}-1$. D'après le théorème d'Euler,

$$10^{\phi(19^2)} \equiv 1 \pmod{19^2} \qquad \text{et} \qquad 10^{\phi(53^2)} \equiv 1 \pmod{53^2},$$

où ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Il suffit donc de vérifier que $\phi(19^2)$ et $\phi(53^2)$ divisent tous les deux $4 \cdot 117819$. Ceci découle du fait que $\phi(19^2) = 19^2-19 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, $\phi(53^2) = 53^2-53 = 2^2 \cdot 13 \cdot 53$ et $4 \cdot 117819 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53$.

Exercice 6. Soient m et n deux entiers tels que $0 \leqslant m \leqslant 2n$. Prouver que le nombre entier

$$2^{2n+2}+2^{m+2}+1$$

est un carré parfait si, et seulement si, $m = n$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

▷ Remarquons que si $m = n$, alors $2^{2n+2}+2^{m+2}+1 = (2^{m+1}+1)^2$ est bien un carré parfait.

▷ Réciproquement, supposons que $2^{2n+2}+2^{m+2}+1$ est un carré parfait. Comme il est strictement plus grand que $2^{2n+2} = (2^{n+1})^2$, il est supérieur ou égal au carré suivant, c'est-à-dire $2^{2n+2}+2^{m+2}+1 \geqslant (2^{n+1}+1)^2$.

En développant, il vient $2^{m+2} \geqslant 2^{n+2}$, donc $m \geqslant n$. Supposons par l'absurde que $m > n$ soit $2^m > 2^{2n-m}$.

Par hypothèse, la quantité $2^{2n+2}+2^{m+2}+1$ est le carré d'un entier impair $2k+1$ strictement plus grand que 1, d'où

$$2^{2n+2}+2^{m+2}+1 = (2k+1)^2$$

pour un certain entier $k \geqslant 1$, ce qui se réécrit sous la forme $k(k+1) = 2^{2n}+2^m = 2^m(2^{2n-m}+1)$. Or les entiers k et $k+1$ sont premiers entre eux. On en déduit que :

– soit $k = 2^m p$ et $p(k+1) = 2^{2n-m} + 1$ ce qui entraîne $(k+1)p < k/p + 1$: contradiction.
– soit $k+1 = 2^m p$ et $pk = 2^{2n-m} + 1$ ce qui entraîne $kp < \frac{k+1}{p} + 1$ donc $kp \leqslant \frac{k+1}{p}$, ou encore $k(p^2-1) \leqslant 1$, ce qui impose $p = 1$ puisque $k \geqslant 1$. Alors, $2^{2n-m} = 2(2^{m-1}-1)$ donc $2n - m = 1$ et $m = 2$: contradiction.

Ainsi, si $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1 = (2^{m+1}+1)^2$ est un carré parfait, alors $m = n$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Montrer qu'il existe une infinité de nombres entiers strictement positifs a tels que a^2 divise $2^a + 3^a$.

Solution de l'exercice 7 Remarquons que $a = 1$ convient puis construisons par récurrence une suite (u_n) strictement croissante d'entiers impairs vérifiant la propriété.

▷ Tout d'abord, on vérifie que $a = 1$ et $a = 5$ conviennent. Posons ainsi $u_0 = 1$ et $u_1 = 5$.

▷ Considerons un entier $n \geqslant 1$ et supposons la suite définie jusqu'au rang n. Par définition de u_n, il existe un entier q tel que $qu_n^2 = 2^{u_n} + 3^{u_n}$. Comme $u_n \geqslant u_1 = 5$, on a $q > 1$.

Soit $p \geqslant 3$ un facteur premier (impair) de q et vérifions que $u_{n+1} = pu_n$ vérifie la propriété requise. Montrons que

$$p \quad \text{divise} \quad 3^{u_n(p-1)} - 2^{u_n}3^{u_n(p-2)} + \cdots + 2^{u_n(p-1)}. \tag{1}$$

Ceci permet de conclure, car alors, étant donné que pu_n^2 divise $2^{u_n} + 3^{u_n}$, il en découle que $p \cdot pu_n^2$ divise

$$\left(3^{u_n(p-1)} - 2^{u_n}3^{u_n(p-2)} + \cdots + 2^{u_n(p-1)}\right)(2^{u_n} + 3^{u_n}) = (2^{u_n})^p + (3^{u_n})^p = 2^{pu_n} + 3^{pu_n},$$

ce qui achève la démonstration.

Pour établir (1), on remarque que p divise $2^{u_n} + 3^{u_n}$ (car p divise q), de sorte qu'on a la congruence $2^{u_n} \equiv -3^{u_n} \pmod{p}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} 3^{u_n(p-1)} - 2^{u_n}3^{u_n(p-2)} + \cdots + 2^{u_n(p-1)} &\equiv 3^{u_n(p-1)} + 3^{u_n(p-1)} + \cdots + 3^{u_n(p-1)} \pmod{p} \\ &\equiv p3^{u_n(p-1)} \pmod{p} \\ &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Soient $m, n \geqslant 1$ deux entiers impairs tels que m divise $n^2 + 2$ et n divise $m^2 + 2$. Prouver que m et n sont tous les deux des termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$u_1 = u_2 = 1, \qquad u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} \qquad \text{si } n \geqslant 3.$$

Solution de l'exercice 8 La structure de la solution est la suivante :

– On montre que mn divise $m^2 + n^2 + 2$;
– On montre que $m^2 + n^2 + 2 = 4mn$;
– On montre que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante ;
– On conclut en montrant qu'en fait m et n sont deux termes *consécutifs* de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

▷ Soit d le PGCD de m et de n. Comme m divise n^2+2, on en déduit que d divise n^2+2 et donc que d divise 2. Comme m et n sont impairs, on en déduit que $d=1$, de sorte que m et n sont premiers entre eux. Ainsi, mn divise m^2+n^2+2.

▷ Montrons que $m^2+n^2+2=4mn$ en utilisant la technique connue en anglais sous le nom de « Vieta jumping ». Plus précisément, soit $k=(m^2+n^2+2)/(mn)$, et considérons tous les couples d'entiers strictement positifs (x,y) tels que

$$x^2+y^2+2=kxy.$$

Parmi ces couples, choississons-en un qui minimise la somme $x+y$. Nous allons montrer que $x=y$. Raisonnons par l'absurde en supposant, sans perte de généralité, que $x>y\geqslant 1$. On s'intéresse alors à l'équation du second degré

$$t^2-kyt+y^2+2=0$$

d'inconnue t. On sait déjà que $t_1=x$ est solution. D'après les formules de Viète,

$$t_2=ky-x=\frac{y^2+2}{x} \tag{2}$$

est également solution. L'équation (2) montre que t_2 est un entier strictement positif. Comme $1\leqslant y\leqslant x-1$, on a

$$t_2=\frac{y^2+2}{x}\leqslant\frac{(x-1)^2+2}{x}<x=t_1,$$

où on a utilisé le fait que $x\geqslant 2$ pour la dernière inégalité. Ainsi, $t_2+y<t_1+y=x+y$, ce qui contredit la minimalité de $x+y$. Il en découle que $x=y$, et donc x^2 divise $2x^2+2$. On en déduit que $x=1$, d'où

$$k=\frac{1^2+1^2+2}{1}=4.$$

Nous avons donc établi que

$$m^2+n^2+2=4mn. \tag{3}$$

▷ Vérifions que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, en écrivant que pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$u_{n+1}-u_n=3u_n-u_{n-1}>u_n-u_{n-1}.$$

Par récurrence, on en déduit que, pour tout entier $n\geqslant 1$, $u_{n+1}-u_n>u_2-u_1=0$.

▷ Montrons finalement que m et n sont deux termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence forte sur $m+n$. L'initialisation ne pose pas de soucis : si $m+n=2$, on a $m=n=1$. Soit donc $k\geqslant 3$, supposons le résultat établi pour tous les couples (m,n) d'entiers strictement positifs vérifiant (3) avec $m+n<k$, et considérons un couple d'entiers strictement positifs (m,n) vérifiant (3) tels que $m+n=k$. Tout d'abord, $m\neq n$, car sinon $m=n=1$ d'après (3). Sans perte de généralité, supposons $m>n$. Mais, comme dans le paragraphe précédent, si (m,n) est solution, alors $(n,4n-m)$ l'est également, avec $m+n>n+(4n-m)$. D'autre part, on vérifie aisément que $2n-\sqrt{3n^2-2}<n<3n<2n+\sqrt{3n^2-2}$ pour tout entier $n\geqslant 2$. Ainsi, par (3), on a $m=2n+\sqrt{3n^2-2}$ de sorte que $n>4n-m$. Par hypothèse de récurrence, il existe un entier $i\geqslant 2$ tel que $u_{i-1}=n$ et $u_{i-2}=4n-m$. Mais alors $u_i=4n-(4n-m)=m$, ce qui montre bien que m et n sont deux termes consécutifs de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 9. Trouver tous les entiers strictement positifs a tels que l'entier

$$1-8\cdot 3^a+2^{a+2}(2^a-1) \tag{4}$$

soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 9 La quantité (4) est égale à $(2^{a+1}-1)^2 - 2^3 \cdot 3^a$. On remarque que cette quantité est un carré pour $a = 3$ (elle vaut $9 = 3^2$) et $a = 5$ (elle vaut $2025 = 45^2$) mais pas pour $a \in \{1, 2, 4, 6, 7\}$. On suppose dorénavant $a \geqslant 8$.

Supposons que la quantité (4) soit un carré, c'est-à-dire, puisqu'elle est impaire, qu'il existe un entier k tel que

$$(2^{a+1}-1)^2 - 2^3 \cdot 3^a = (2k+1)^2.$$

Ainsi

$$(2^{a+1}-1)^2 - (2k+1)^2 = 2^3 \cdot 3^a, \tag{5}$$

soit encore $(2^a - k - 1)(2^a + k) = 2 \cdot 3^a$. Il existe alors un entier $b \geqslant 0$ tel que l'une des deux situations suivantes se produit (en discutant selon la parité de k) :

– on a $2^a + k = 2 \cdot 3^b$ et $2^a - k - 1 = 3^{a-b}$ donc $2k + 1 = 2 \cdot 3^b - 3^{a-b}$ (donc $b \geqslant a - b$) ;

– on a $2^a + k = 3^b$ et $2^a - k - 1 = 2 \cdot 3^{a-b}$ donc $2k + 1 = 3^b - 2 \cdot 3^{a-b}$ (donc $b \geqslant a - b$).

Ainsi, 3^{a-b} divise $2k + 1$, et donc $3^{2(a-b)}$ divise $(2k + 1)^2 + 2^3 \cdot 3^a$. En utilisant (5), il vient $3^{a-b} \mid 2^{a+1} - 1$.

Dans la première situation, en additionnant les deux égalités on a $2 \cdot 3^b = 2^{a+1} - 3^{a-b} - 1 < 2^{a+1}$ donc $3^b < 2^{a+1}$. On montre de manière analogue que cette inégalité est valable aussi dans la deuxième situation.

Remarquons que $2^9 \leqslant 3^{9-3}$ donc, pour tout $a \geqslant 8$,

$$2^{a+1} = 2^9 \cdot 2^{a-8} \leqslant 2^9 \cdot 3^{a-8} \leqslant 3^6 \cdot 3^{a-8} = 3^{a-2}.$$

En combinant les deux inégalités, $3^b < 3^{a-2}$ donc $a - b \geqslant 3$.

Comme 3^{a-b} divise $2^{a+1} - 1$ et $a - b \geqslant 3$, on a $2^{a+1} \equiv 1 \pmod{27}$ d'où 18 divise $a + 1$ (en remarquant que le plus petit entier $k > 0$ tel que $2^k \equiv 1 \pmod{27}$ est 18). Fort de cette condition, réduisons la quantité de l'énoncé modulo 19 en utilisant le théorème d'Euler ($x^{18} = x^{\varphi(19)} \equiv 1 \pmod{19}$ pour tout entier x non divisible par 19) et la relation $3 \cdot 13 \equiv 1 \pmod{19}$:

$$(2^{a+1}-1)^2 - 2^3 \cdot 3^a \equiv (1-1)^2 - 2^3.13 \pmod{19} \equiv 10 \pmod{19}.$$

On conclut en remarquant alors que $(2k+1)^{18} \equiv 10^9 \pmod{19} = 18 \pmod{19}$ ce qui contredit le théorème d'Euler. Il n'y a donc pas de solution $a \geqslant 9$.

En conclusion, les seules solutions sont 3 et 5.