Envoi Numéro 2

à renvoyer au plus tard le vendredi 12 décembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2000 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2013-2014 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B »ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que ses diagonales sont à l'intérieur de $ABCD$), et P l'intersection de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. On note O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits à ABP, BCP, CDP et DAP.
Montrer que $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. H son orthocentre et P, Q et R les pieds des hauteurs issues de A, B et C.
Montrer que H est le centre du cercle inscrit à PQR.

Exercice 3. Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe ayant tous ses angles égaux à 120°.
Montrer que $AB + BC = DE + EF$.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On note P, Q, R et S les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Montrer que l'aire de $PQRS$ est égale à la moitié de l'aire de $ABCD$.

Exercices Communs

Exercice 5. Soit ABC un triangle rectangle en C. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en P, et celle de $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en Q. Soient M et N sur $[AB]$ tels que (MP) et (NQ) soient perpendiculaires à (AB).
Combien vaut l'angle $\widehat{MCN}$?

Exercice 6. Soit ABC un triangle ayant ses trois angles aigus, et P le pied de la hauteur issue de A. On note I_1 et I_2 les centres de cercles inscrits à ABP et ACP. Le cercle inscrit à ABC touche $[BC]$ en D.
Combien valent les angles du triangle I_1I_2D ?

Exercices du groupe A

Exercice 7. Deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres O_1 et O_2 se coupent en P et Q. Une droite passant par O_1 coupe Γ_2 en A et B, et une droite passant par O_2 coupe Γ_1 en C et D.
Montrer que s'il existe un cercle passant par A, B, C et D, alors le centre de ce cercle est sur (PQ).

Exercice 8. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que les cercles inscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB ont un point commun.
Montrer que $ABCD$ est un losange.

Exercice 9. Deux cercles ω_1 et ω_2 sont tangents en S, avec ω_1 à l'intérieur de ω_2. On note O le centre de ω_1. Une corde $[AB]$ de ω_2 est tangente à ω_1 en T.
Montrer que (AO), la perpendiculaire à (AB) passant par B et la perpendiculaire à (ST) passant par S sont concourantes.

Exercice 10. Soient Γ un cercle de centre O, et (d) une droite qui n'intersecte pas Γ. On appelle P le projeté orthogonal de O sur (d). Soit Q un point variable sur la droite (d), et (t_1) et (t_2) les tangentes à Γ passant par Q. On note A et B les projetés orthogonaux de P sur (t_1) et (t_2).
Montrer que le point d'intersection de (AB) et (OP) reste fixe quand Q varie.

Fin