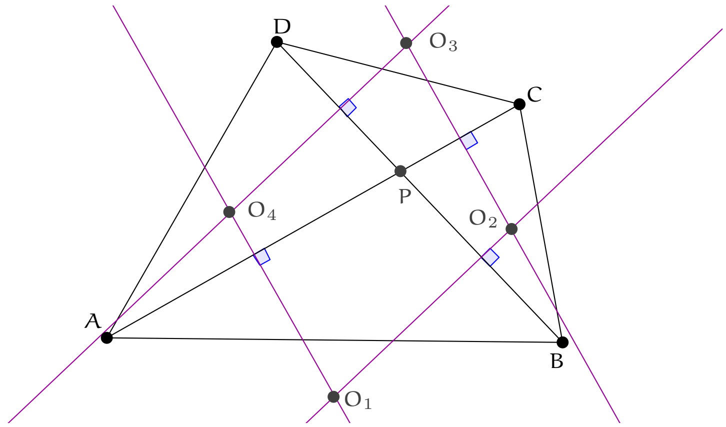
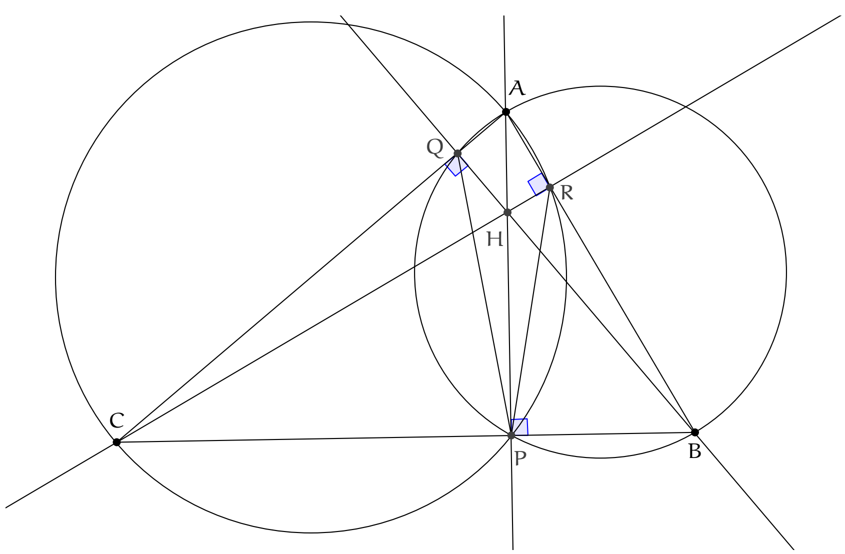
Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que ses diagonales sont à l'intérieur de $ABCD$), et P l'intersection de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. On note O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits à ABP, BCP, CDP et DAP.
Montrer que $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme.



Solution de l'exercice 1 O_1 et O_2 sont sur la médiatrice de $[PB]$, donc O_1O_2 est la médiatrice de $[PB]$. De même, (O_3O_4) est la médiatrice de $[PD]$, donc (O_1O_2) et (O_3O_4) sont toutes deux perpendiculaires à (BD), donc elles sont parallèles. De même, (O_2O_3) et (O_4O_1) sont toutes deux perpendiculaires à (AC), donc elles sont parallèles.
$ABCD$ a ses côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. H son orthocentre et P, Q et R les pieds des hauteurs issues de A, B et C.
Montrer que H est le centre du cercle inscrit à PQR.



Solution de l'exercice 2 On sait que les points A, B, P et Q sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AB]$, donc :

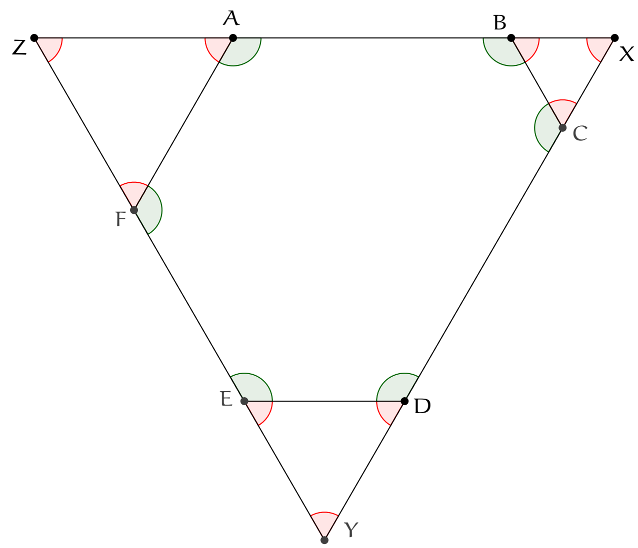
$$\widehat{HPQ} = \widehat{APQ} = \widehat{ABQ} = 90^\circ - \widehat{BAQ} = 90^\circ - \widehat{BAC}$$

De même, A, C, P et R sont cocycliques sur le cercle de diamètre [AC] donc :

$$\widehat{HPR} = \widehat{APR} = \widehat{ACR} = 90^\circ - \widehat{CAR} = 90^\circ - \widehat{BAC}$$

On a donc $\widehat{HPQ} = \widehat{HPR}$ donc (PH) est la bissectrice de $\widehat{QPR}$. On montre de même que (QH) et (RH) sont les bissectrices de $\widehat{PQR}$ et $\widehat{PRQ}$, donc H est le centre du cercle inscrit à PQR.

Exercice 3. Soit ABCDEF un hexagone ayant tous ses angles égaux à 120°. Montrer que $AB + BC = DE + EF$.

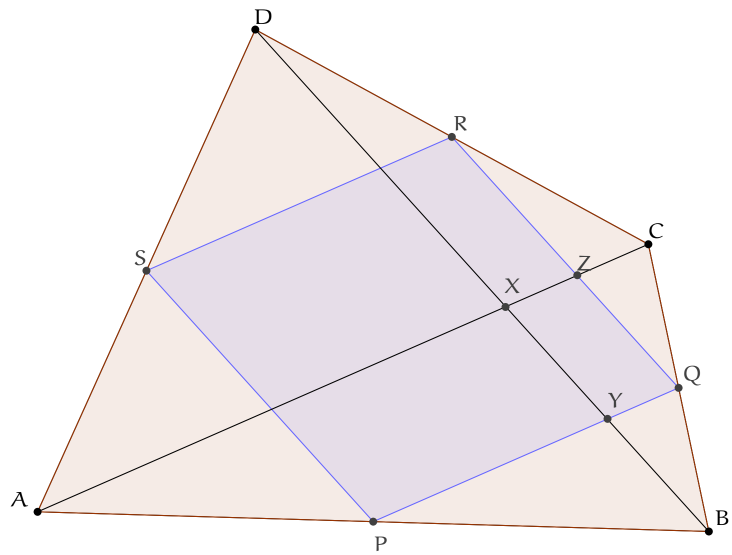


<u>*Solution de l'exercice 3*</u> On prolonge les côtés [AB], [CD] et [EF], et on appelle X l'intersection de (AB) et (CD), Y celle de (CD) et (EF), et Z celle de (EF) et (AB). Alors $\widehat{XBC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 60^\circ$ et de même pour $\widehat{XCB}$, donc :

$$\widehat{ZXY} = \widehat{BXC} = 180^\circ - \widehat{XBC} - \widehat{XCB} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

et de même pour les angles du triangle XYZ : on a représenté les angles de 120° en vert et ceux de 60° en rouge sur la figure.
Le triangle XBC est donc équilatéral, donc $AB+BC = AB+BX = AX$ et de même $DE+EF = FY$. Or, XYZ est équilatéral donc $ZX = ZY$ et ZAF est équilatéral donc $ZA = ZF$, d'où $AX = ZX - ZA = ZY - ZF = FY$, d'où le résultat.

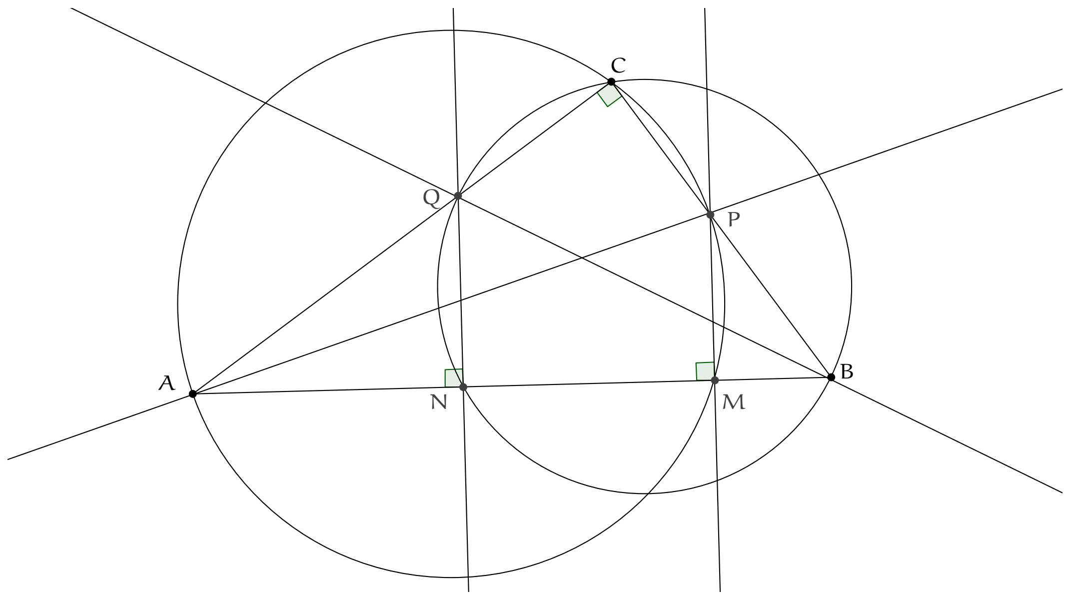
Exercice 4. Soit ABCD un quadrilatère convexe. On note P, Q, R et S les milieux des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA]. Montrer que l'aire de PQRS est égale à la moitié de l'aire de ABCD.



Solution de l'exercice 4 On note X l'intersection des diagonales de $ABCD$. $[PQ]$ coupe $[BD]$ en Y, et $[QR]$ coupe $[AC]$ en Z. D'après le théorème de la droite des milieux, (PQ) est parallèle à (AC), donc (QZ) est parallèle à (CX) et, de nouveau d'après le théorème de la droite des milieux, Z est le milieu de $[BX]$, donc l'aire du triangle XQZ est la moitié de l'aire du triangle XQB. De même, l'aire du triangle XQY est la moitié de celle du triangle XQC.
Le quadrilatère $PQRS$ couvre donc la moitié du triangle XBC. De la même manière, il couvre la moitié des triangles XCD, XDA et XAB, donc son aire est la moitié de celle de $ABCD$.

Exercices Communs

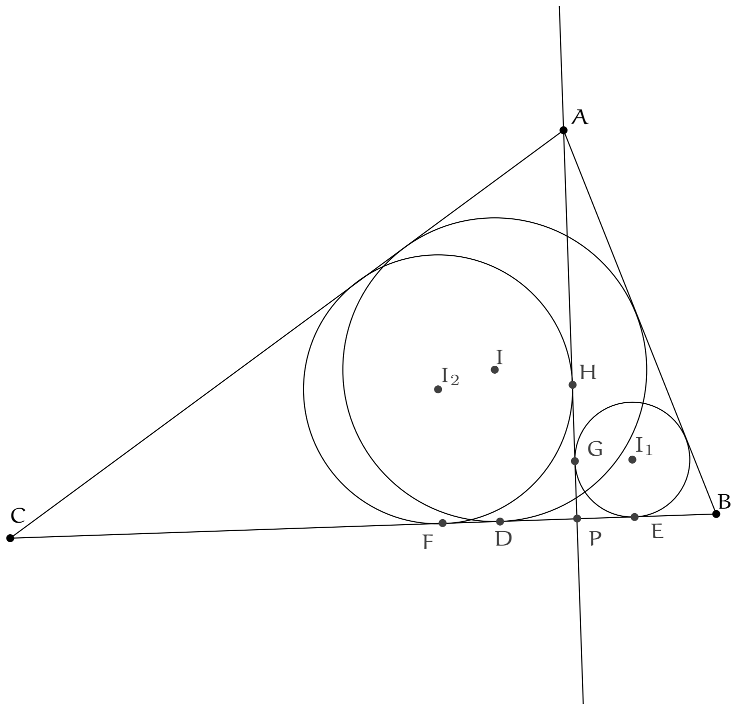
Exercice 5. Soit ABC un triangle rectangle en C. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en P, et celle de $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en Q. Soient M et N sur $[AB]$ tels que (MP) et (NQ) soient perpendiculaires à (AB). Combien vaut l'angle $\widehat{MCN}$?



Solution de l'exercice 5 Comme les angles $\widehat{AMP}$ et $\widehat{ACP}$ sont droits, les points A, C, P et M sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AP]$. De même, les points B, C, Q et N sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[BQ]$. On peut donc faire une chasse aux angles :

$$\begin{aligned}
\widehat{MCN} &= 90^\circ - \widehat{MCP} - \widehat{NCQ} \\
&= 90^\circ - \widehat{MAP} - \widehat{NBQ} \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} \\
&= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\widehat{ACB} \\
&= 45^\circ
\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit ABC un triangle ayant ses trois angles aigus, et P le pied de la hauteur issue de A. On note I_1 et I_2 les centres de cercles inscrits à ABP et ACP. Le cercle inscrit à ABC touche $[BC]$ en D. Combien valent les angles du triangle I_1I_2D ?



Solution de l'exercice 6 On note E et F les points où les cercles inscrits à ABP et ACP touchent [BC], et G et H les points où ils touchent [AP] : PEI_1H est un carré car les angles en P, E et H sont droits, et $I_1E = I_1H$, donc $EP = EI_1$, et de même $FP = FI_2$. On a donc :

$$FD = CD - CF = \frac{CA + CB - AB}{2} - \frac{CA + CP - AP}{2} = \frac{CB - CP + AP - AB}{2} = \frac{BP + AP - AB}{2} = PE = EI_1$$

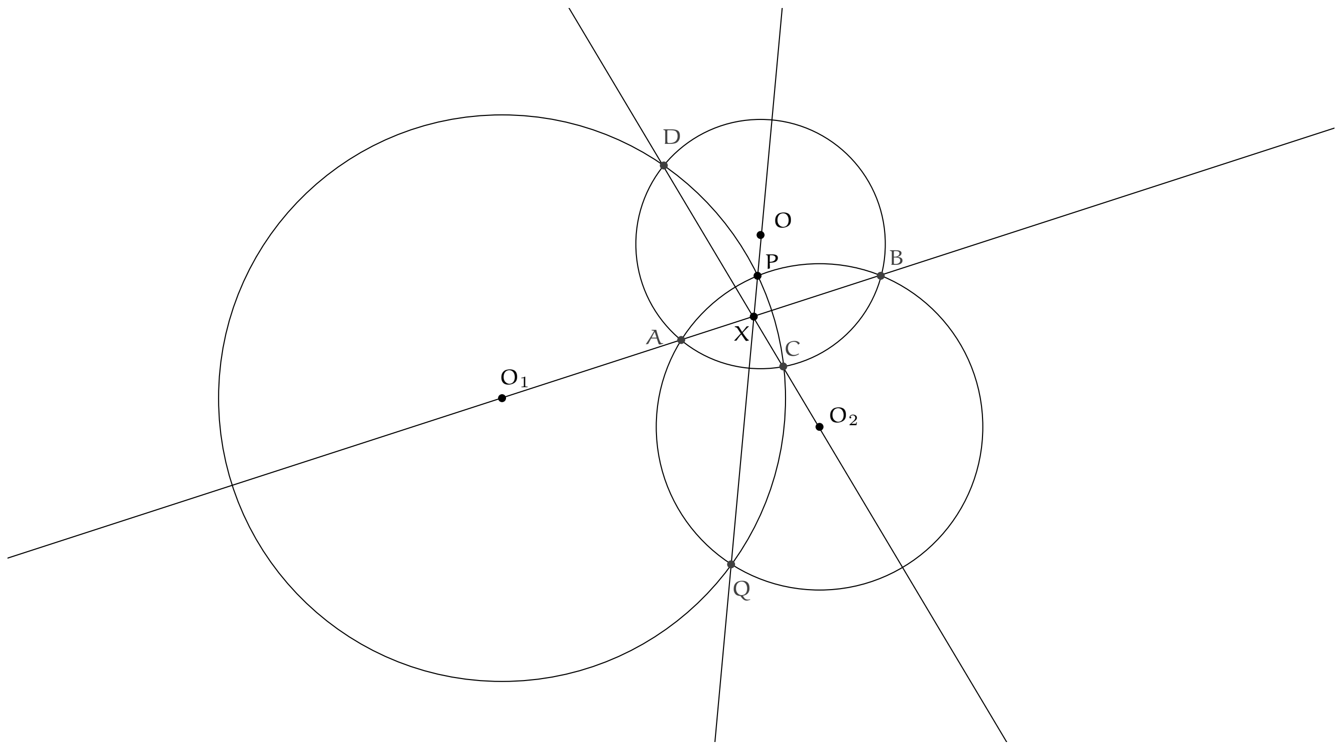
et de même $ED = FI_2$. Comme de plus $\widehat{I_2FD}$ et $\widehat{I_1ED}$ sont droits, les triangles I_1ED et I_2FD sont isométriques donc $DI_1 = DI_2$. De plus on a :

$$\widehat{I_1DI_2} = 180^\circ - \widehat{I_1DE} - \widehat{I_2DF} = 180^\circ - \widehat{I_1DE} - \widehat{DI_1E} = \widehat{DEI_1} = 90^\circ$$

Le triangle est donc isocèle rectangle en D, donc ses angles valent 90°, 45° et 45°.

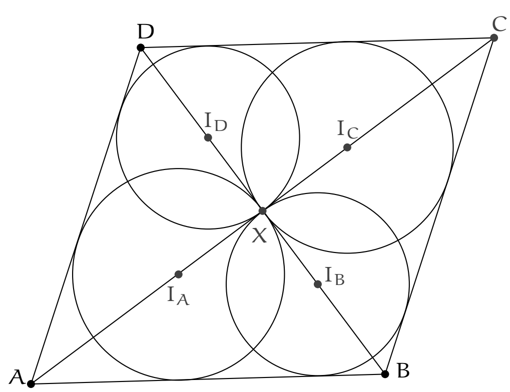
Exercices du groupe A

Exercice 7. Deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres O_1 et O_2 se coupent en P et Q. Une droite passant par O_1 coupe Γ_2 en A et B, et une droite passant par O_2 coupe Γ_1 en C et D. Montrer que s'il existe un cercle passant par A, B, C et D, alors le centre de ce cercle est sur (PQ).



Solution de l'exercice 7 On note Γ le cercle passant par A, B, C et D. D'après le théorème des axes radicaux, (AB), (CD) et (PQ) sont concourrantes en un point qu'on appelle X. De plus, (AB) est perpendiculaire à (OO_2), donc est la hauteur issue de O_1 dans OO_1O_2. De même, (CD) est la hauteur issue de O_2, donc X est l'orthocentre de OO_1O_2. Par conséquent, (OX) est perpendiculaire à (O_1O_2), mais on sait déjà que la perpendiculaire à (O_1O_2) passant par X est (PQ), donc les droites (OX) et (PQ) sont confondues, et $O \in (PQ)$.

Exercice 8. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que les cercles inscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB ont un point commun. Montrer que $ABCD$ est un losange.



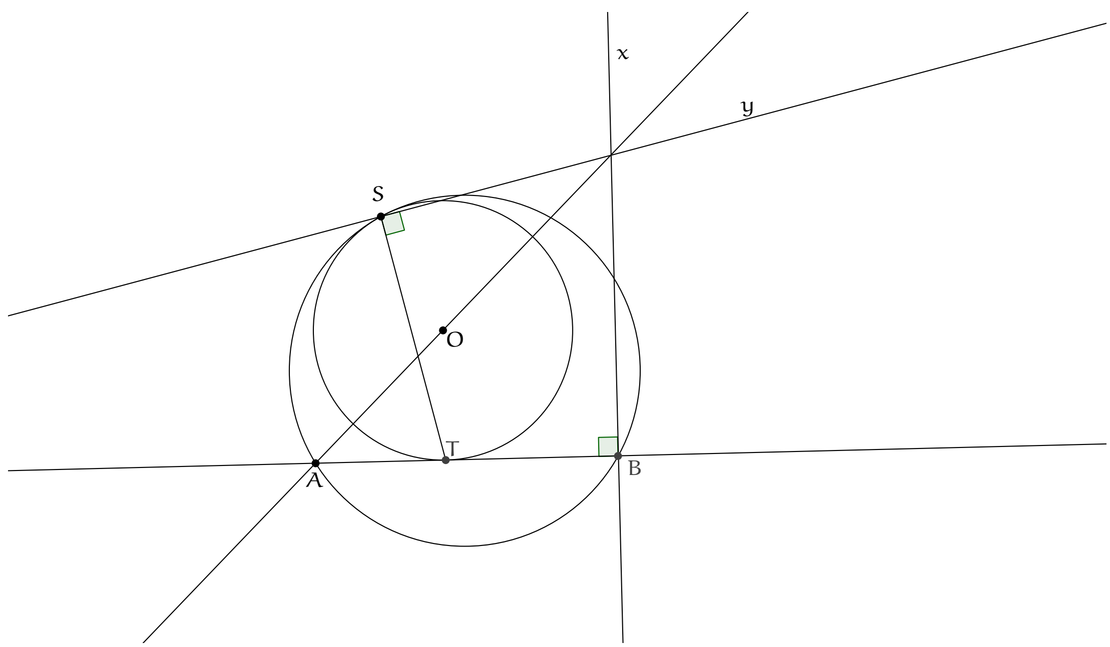
Solution de l'exercice 8 On note ω_A le cercle inscrit à DAB et ainsi de suite : Les cercles ω_B et ω_D sont situés de part et d'autre de (AC), donc ils ne peuvent s'intersecter que sur (BC). De même, ω_A et ω_c ne peuvent s'intersecter que sur (BD), donc l'intersection des 4 cercles ne peut être que l'intersection des diagonales, qu'on note X.

De plus, notons R et S les points de tangence du cercle inscrit à ABC avec [AB] et [BC], et T et U les points de contact du cercle inscrit à CDA avec [CD] et [DA]. On a :

$$AB + CD = AR + BR + CT + DT = AX + BS + CX + DU = AU + BS + CS + DU = AD + BC$$

donc $ABCD$ est circonscriptible : il existe un cercle à l'intérieur de $ABCD$ tangent à tous les côtés, qu'on note ω.
Le centre de l'homothétie négative qui envoie ω_A sur ω_C est X, donc est sur (AC). De plus, A est le centre de l'homothétie positive qui envoie ω_A sur ω, et C est le centre de l'homothétie positive qui envoie ω sur ω_C, donc le centre de l'homothétie positive qui envoie ω_A sur ω_C est aussi sur (AC), donc les centres de ω_A et ω_C sont sur (AC), donc (AC) est la bissectrice de $\widehat{BCD}$ et $\widehat{DAB}$, donc le quadrilatère est symétrique par rapport à (AC) d'où $AB = AD$ et $CB = CD$. On a de même $BA = BC$ et $DA = DC$, donc $ABCD$ est un losange.

Exercice 9. Deux cercles ω_1 et ω_2 sont tangents en S, avec ω_1 à l'intérieur de ω_2. On note O le centre de ω_1. Une corde [AB] de ω_2 est tangente à ω_1 en T. Montrer que (AO), la perpendiculaire à (AB) passant par B et la perpendiculaire à (ST) passant par S sont concourantes.



<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On note (Bx) la perpendiculaire à (AB) passant par B, et (Sy) la perpendiculaire à (ST) passant par S. Pour obtenir le résultat grâce au théorème de Ceva trigonométrique dans le triangle ABS, on doit montrer :

$$\frac{\sin \widehat{BAO}}{\sin \widehat{SAO}} \cdot \frac{\sin \widehat{ASy}}{\sin \widehat{BSy}} \cdot \frac{\sin \widehat{SBx}}{\sin \widehat{ABx}} = 1$$

Or, on sait que $\sin ABx = 1$. De plus, l'homothétie de centre S qui envoie ω_1 sur ω_2 envoie T sur le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, donc (ST) est la bissectrice intérieure de $\widehat{ASB}$ et (Sy) est sa bissectrice extérieure, d'où $\sin \widehat{ASy} = \sin \widehat{BSy}$. Il reste donc à montrer :

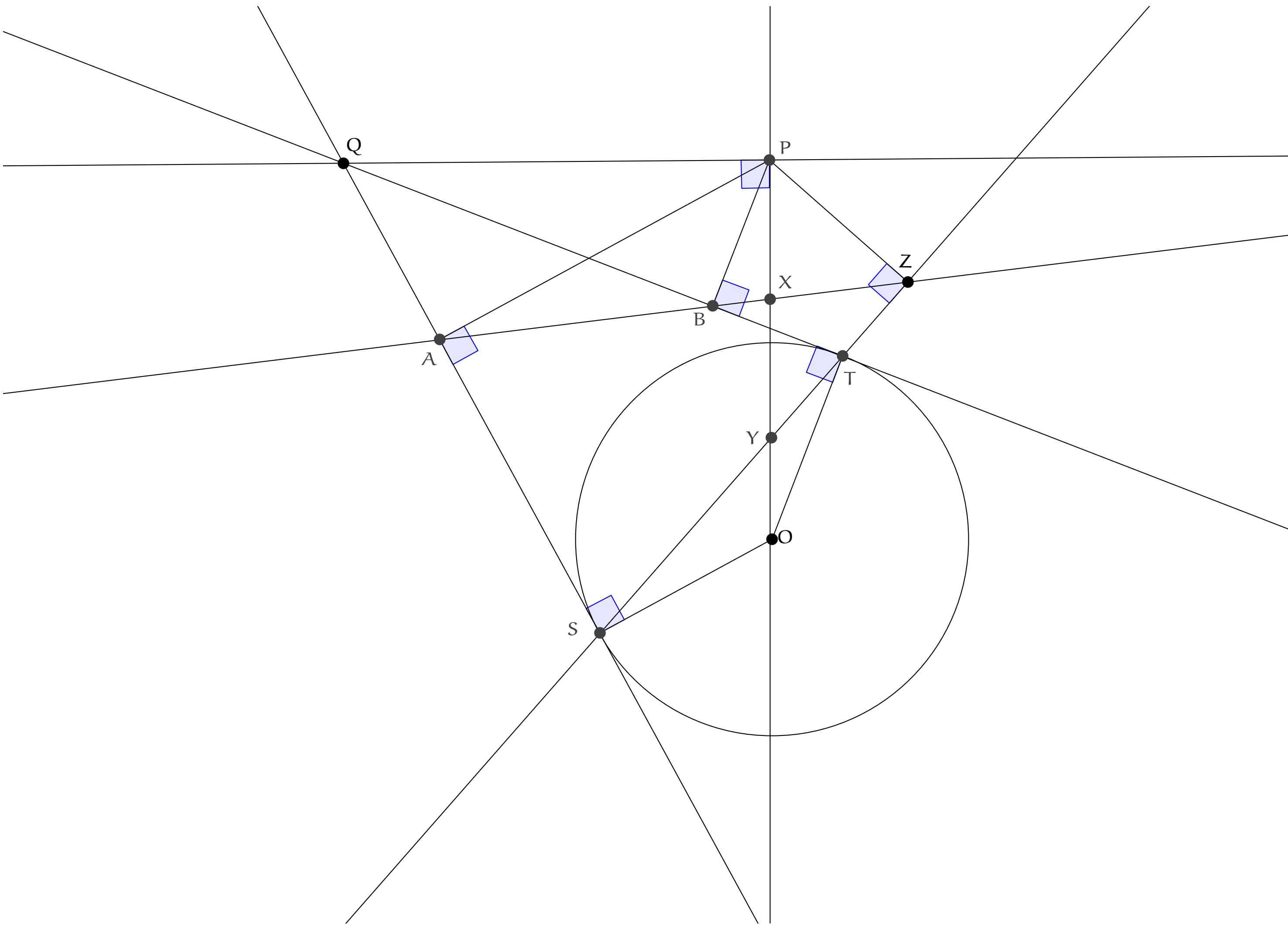
$$\frac{\sin \widehat{BAO}}{\sin \widehat{SAO}} \cdot \sin \widehat{SBx} = 1$$

Or, $\sin \widehat{BAO} = \frac{OT}{AO} = \frac{OS}{AO} = \frac{\sin \widehat{OAS}}{\sin \widehat{ASO}}$, donc il ne reste plus qu'à montrer $\widehat{ASO} = \widehat{SBx}$. Si on note O' le centre de ω_2, alors :

$$\widehat{ASO} = \widehat{ASO'} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{AO'S}) = \frac{\pi}{2} - \widehat{SBA} = \widehat{SBx}$$

d'où le résultat.

Exercice 10. Soient Γ un cercle de centre O, et (d) une droite qui n'intersecte pas Γ. On appelle P le projeté orthogonal de O sur (d). Soit Q un point variable sur la droite (d), et (t_1) et (t_2) les tangentes à Γ passant par Q. On note A et B les projetés orthogonaux de P sur (t_1) et (t_2). Montrer que le point d'intersection de (AB) et (OP) reste fixe quand Q varie.



<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On note X l'intersection de (AB) et (OP), S et T les points où (t_1) et (t_2) touchent Γ, et Y le point d'intersection de (ST) et (OP). Une première remarque qu'on peut faire est que O, P, Q, S et T sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[OQ]$. Une bonne figure suggère que Y ne dépend pas de Q. Et en effet, on a :

$$\widehat{OSY} = \widehat{OST} = \widehat{OQT} = \widehat{OQS} = \widehat{OPS}$$

donc les triangles OSY et OPS sont indirectement semblables donc $\frac{OY}{OS} = \frac{OS}{OP}$ d'où $OY = \frac{r^2}{OP}$ où r est le rayon de Γ, donc OY ne dépend pas de Q et Y est fixe (les amateurs de géométrie projective auront reconnu le pôle de (d) par rapport à Γ).

Soit maintenant Z le projeté orthogonal de P sur (ST) : comme P est sur le cercle circonscrit à PST, la droite de Simson nous garantit que $Z \in (AB)$. Faisons maintenant un peu de chasse aux angles :

$$\widehat{PZX} = \widehat{PZA} = \widehat{PSA} = \widehat{PSQ} = \widehat{POQ} = \widehat{OPZ}$$

où on a utilisé successivement que P, Z, A et S sont cocycliques (sur le cercle de diamètre [PS]), que O, P, Q, S sont cocycliques et enfin que $(OQ) \parallel (PZ)$. On a donc que XPZ est isocèle en X, donc X est sur la médiatrice de $[PZ]$. Or, le centre du cercle circonscrit à PYZ est sur cette médiatrice, et est sur (PY) car PYZ est rectangle en Z.
X est donc le centre du cercle circonscrit à PYZ, donc est le milieu de [PY] car PYZ est rectangle en Z. Comme P et Y ne dépendent pas de Q, X non plus.

Fin