Olympiades Françaises de Mathématiques 2014-2015

Envoi Numéro 1

À renvoyer au plus tard le samedi 15 novembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2000 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2013-2014 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. On considère un échiquier classique 8×8. Un *zigzag* est un chemin sur les cases blanches, qui part d'une case (quelconque) de la ligne du bas, et monte de ligne en ligne jusqu'à atteindre celle du haut (sur n'importe quelle case) : à chaque étape, on monte d'une case en diagonale. Combien y a-t-il de zigzags ?

Exercice 2. On prend 1008 entiers distincts compris (au sens large) entre 1 et 2014.
(i) Montrer qu'il existe trois entiers a, b, c, deux à deux distincts, tels que le PGCD de a et b divise c (le PGCD, ou Plus Grand Diviseur Commun de deux entiers, est le plus grand entier naturel qui les divise tous les deux).
(ii) Montrer qu'il existe trois entiers a, b, c, deux à deux distincts, tels que le PGCD de a et b ne divise pas c.

Exercice 3. Combien y a-t-il de nombre à six chiffres qui ont quatre chiffres pairs, deux chiffres impairs et qui sont multiples de 5 ?
Note : un nombre ne commence pas par un 0.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit n un entier strictement positif. On considère $2n+1$ entiers distincts compris au sens large entre $-2n+1$ et $2n-1$. Montrer qu'on peut en choisir 3 dont la somme soit nulle.

Exercice 5. On considère 6 points du plan, disposés de telle sorte que le triangle formé par trois quelconques d'entre eux ait trois côtés de longueurs distinctes. Montrer qu'il existe un triangle dont le plus court côté est également le côté le plus long d'un autre triangle.

Exercice 6. Dans un cirque, il y a plusieurs clowns. Chacun utilise au moins 5 couleurs, parmi 12 possibles, pour se peindre. Une même couleur est utilisée par au plus 20 clowns. Deux clowns n'ont jamais exactement les mêmes couleurs. Combien y a-t-il de clowns au maximum ?

Exercices du groupe A

Exercice 7. On considère n^2+2n+1 points dans un carré de côté n. Montrer que trois d'entre eux sont les sommets d'un triangle (éventuellement dégénéré) d'aire au plus $1/2$.

Exercice 8. On dispose de n jetons portant chacun un numéro entier (qui peut être négatif). Si on trouve parmi eux deux jetons portant le même numéro m, on les enlève et on met à leur place un jeton portant le numéro $m-1$, et un autre portant le numéro $m+1$. Montrer qu'au bout d'un nombre fini de tels changements, tous les jetons porteront des numéros distincts.

Exercice 9. On considère un quadrillage formé de tous les petits carrés de côté 1 entièrement inclus dans le disque donné par l'inéquation $x^2 + y^2 \leqslant 2014^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy. A chaque étape du jeu, chaque carré contient le nombre 1 ou le nombre -1. On suppose que chaque case du quadrillage contient un 1 au début. Un tour consiste à choisir une ligne, une colonne, ou une diagonale (c'est-à-dire un ensemble de cases maximal tel que les centres de ces dernières soient alignés sur une droite formant un angle de 45 degrés avec l'un des axes de coordonnées) du quadrillage, et à changer les signes du contenu de toutes les cases de celle-ci. Peut-on à la fin avoir un -1 dans une case, et des 1 dans toutes les autres ?

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle S l'ensemble des suites de $2n$ chiffres comportant n zéros et autant de uns. Deux suites de S sont voisines lorsqu'il suffit de repositionner un chiffre de l'une pour obtenir l'autre : ainsi, deux suites $a_1 a_2 \dots a_{2n}$ et $a_1 a_2 \dots a_{i-1} a_{i+1} a_{i-2} \dots a_{j-1} a_i a_j a_{j+1} \dots a_{2n}$ sont voisines. Un exemple de telles suites est donné par les suites 11100010 et 11000110 : pour passer de la première suite à la deuxième, on fait passer le premier 1 de la position 1 vers la position 7, et, pour chaque entier $i \in \{2, 3, \dots, 7\}$, on place en position $i - 1$ l'entier initialement placé en position i. Un sous-ensemble S' de S est dit *dense* si toute suite appartenant à S mais pas à S' est voisine d'une suite appartenant à S'. Soit S' un sous-ensemble dense de cardinal minimal. Montrer que $\frac{1}{2n^2+1}|S| \leqslant |S'| \leqslant \frac{1}{n+1}|S|$.
Remarque : on note $|A|$ le cardinal de A.

Fin