Envoi de combinatoire: quelques corrigés

29 octobre 2014

Exercice 1 On considère un échiquier classique 8×8. Un *zigzag* est un chemin sur les cases blanches, qui part d'une case (quelconque) de la ligne du bas, et monte de ligne en ligne jusqu'à atteindre celle du haut (sur n'importe quelle case) : à chaque étape, on monte d'une case en diagonale. Combien y a-t-il de zigzags ?

Solution On écrit un 1 dans chacune des quatre cases blanches du bas. Puis dans la deuxième ligne, on écrit la somme des cases blanches qui y mènent : c'est le nombre de manières d'atteindre ces cases. On recommence dans la troisième ligne, etc. jusqu'à la huitième ligne : sur chacune des quatre cases, on a le nombre de zigzags qui arrivent à cette case. Le nombre total de zigzags est donc $69 + 103 + 35 + 89 = 296$.

35		89		103		69	
	35		54		49		20
10		25		29		20	
	10		15		14		6
3		7		8		6	
	3		4		4		2
1		2		2		2	
	1		1		1		1

Exercice 2 On prend 1008 entiers distincts compris (au sens large) entre 1 et 2014.
(i) Montrer qu'il existe trois entiers a, b, c tels que le pgcd de a et b divise c (le pgcd ou Plus Grand Diviseur Commun de deux entiers est le plus grand entier naturel qui les divise tous les deux).
(ii) Montrer qu'il existe trois entiers a, b, c tels que le pgcd de a et b ne divise pas c.

Solution (i) Groupons les entiers de 1 à 2014 en paires d'entiers consécutifs : $(1, 2), (3, 4),..., (2013, 2014)$. Il y en a 1007. Par le principe des tiroirs, si on choisit 1008 entiers, il y en aura deux d'une même paire, a et b, avec $b = a + 1$. Leur pgcd vaut 1 (puisqu'il divise leur différence), donc divise n'importe lequel des 1006 autres nombres, que l'on peut prendre pour c.

(ii) Il y a 1007 entiers pairs prenables. Donc parmi 1008 nombres, il y a forcément un impair. S'il y a deux nombres pairs au moins parmi les 1008, notons-les a et b. Soit c un nombre impair parmi les 1008. Le pgcd de a et b est multiple de 2, puisque 2 divise à la fois a et b. (en fait, le pgcd de a et b vaut 2 fois le pgcd de $a/2$ et $b/2$). Donc s'il divise c, alors 2 divise c, ce qui est absurde.
S'il y a moins de 2 nombres pairs parmi les 1008, ça veut dire qu'on a pris les 1007 impairs, ainsi qu'un nombre pair, noté c. On peut trouver des triplets d'au moins deux manières.
• Solution courte : on dispose du triplet $(3, 9, 1)$, et il est clair que $pgcd(3, 9)$ ne divise pas 1.
• Solution moins courte : si c est divisible par tous les pgcd de couples d'entiers impairs entre 1 et 2013, ça va lui faire beaucoup de diviseurs premiers : il sera divisible par le pgcd de 3 et 9, le pgcd de 5 et 15, celui de 7 et 21, celui de 11 et 33, etc. Donc il est divisible par 3,5,7,11 déjà (et par 2, puisqu'il est pair). Le plus petit multiple commun de ces nombres est leur produit (puisqu'ils n'ont deux-à-deux aucun facteur commun). Il vaut $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ donc $c > 2014$, ce qui n'est pas possible. Donc il existe deux nombres impairs a et b tels que leur pgcd ne divise pas c.

Exercice 3 Combien y a-t-il de nombres à six chiffres qui ont quatre chiffres pairs, deux chiffres impairs et qui sont multiples de 5 ? Note : un nombre ne commence pas par un 0.

Solution Un tel nombre termine par 0 ou 5. Nous allons compter séparément les nombres qui se terminent par 0 et ceux qui se terminent par 5.

Nombres dont le dernier chiffre est 0 :

— Si le premier chiffre est pair, nous avons 4 possibilités pour le choisir (2,4,6,8, mais pas 0). Il reste à choisir les 4 chiffres du milieu. On a 6 manières de positionner les impairs :

$$(p,p,i,i),\ (p,i,p,i),\ (p,i,i,p),\ (i,p,i,p),\ (i,i,p,p),\ (i,p,p,i)$$

(où p représente un chiffre pair et i un chiffre impair). Ensuite, il y a 5 possibilités pour le choix de chaque chiffre. Donc $6 \times 4 \times 5^4$ possibilités.

— Si le premier chiffre est impair, nous avons 5 possibilités pour le choisir . Il reste 4 manières de positionner l'impair du milieu. Et de nouveau 5 choix pour chaque chiffre du milieu. Donc 4×5^5 nombres possibles.

Nombres dont le dernier chiffre est 5 :

— Si le premier chiffre est pair, nous avons 4 possibilités pour le choisir. Il y a 4 possibilités pour la place de l'impair du milieu, 5 choix pour chacun des chiffres du milieu, donc 16×5^4 possibilités.

— Si le premier chiffre est impair il y a 5 possibilités pour le choisir. Il reste alors simplement à déterminer les pairs du milieu : 5 choix à chaque fois, donc 5^5 choix en tout.

Au total, il y a $24 \times 5^4 + 4 \times 5^5 + 16 \times 5^4 + 5^5 = 13 \times 5^5 = 40625$ possibilités.

Exercice 4 Soit n un entier strictement positif. On considère $2n+1$ entiers distincts compris au sens large entre $-2n+1$ et $2n-1$. Montrer qu'on peut en choisir 3 dont la somme soit nulle.

Solution On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : Pour $n = 1$, on prend $2n + 1 = 3$ entiers distincts parmi $-1, 0, 1$, donc ces trois entiers. Leur somme est bien nulle.

Hérédité : Supposons l'énoncé vrai au rang n : si on prend $2n + 1$ entiers distincts compris au sens large entre $-2n + 1$ et $2n - 1$, alors on peut en choisir 3 dont la somme soit nulle. Maintenant, on veut montrer que parmi $2n + 3$ entiers distincts entre $-2n - 1$ et $2n + 1$, il y en a toujours 3 de somme nulle.

Si parmi ces $2n + 3$ entiers, il y en a $2n + 1$ entre $-2n + 1$ et $2n - 1$, alors c'est gagné par hypothèse de récurrence. On peut donc supposer que 3 au moins de ces entiers sont parmi $\{-2n-1, -2n, 2n, 2n+1\}$. Par symétrie entre les positifs et les négatifs, on peut supposer qu'on dispose de $2n$ et $2n+1$, ainsi que de $-2n-1$ ou $-2n$, donc on peut supposer qu'on ne dispose pas de 0, puisque $0+2n+(-2n) = 0+(2n+1)+(-2n-1) = 0$ et on aurait alors un triplet de somme nulle. Maintenant, considérons les n paires

$$\{-k, -2n-1+k\},\quad 1 \leq k \leq n,$$

si l'une d'elles est incluse dans notre sélection de $2n + 3$ entiers, alors on a encore trois nombres de somme nulle : $-k + (-2n - 1 + k) + (2n + 1) = 0$ et on a terminé. Supposons donc que notre sélection ne contienne qu'au plus un élément de ces n paires, donc il reste au moins $n + 1$ nombres à choisir parmi ($\{1, \ldots, 2n-1\}$ et $-2n - 1$). On pose $A = \{1, \ldots, 2n - 1\}$. On distingue 2 cas.

— Si on a pris $-2n - 1$, on doit prendre au moins n éléments de A. On regarde cette fois les n paires

$$\{k, 2n+1-k\},\quad 1 \leq k \leq n.$$

Si l'une d'elles est complète, on a un triplet à somme nulle avec $-2n - 1$. On a supposé au début que $2n$ était pris, donc si on prend 1, $\{1, 2n\}$ est complète. Sinon on prend n nombres dans les $n-1$ paires restantes, donc par principe des tiroirs, on a une paire complète.

— Si on n'a pas pris $-2n - 1$, on doit prendre au moins n éléments de A. Et on a pris $-2n$ d'après le début du raisonnement.Et A peut se découper en $n - 1$ paires

$$\{k, 2n-k\}, 1 \leq k \leq n-1.$$

De nouveau, par le principe des tiroirs on doit prendre une paire complète, donnant un triplet à somme nulle avec $-2n$.

Ceci clôt la récurrence.

Exercice 5 On considère 6 points du plan, disposés de telle sorte que le triangle formé par trois quelconques d'entre eux ait trois côtés de longueurs distinctes. Montrer qu'il existe un triangle dont le plus court côté est également le côté le plus long d'un autre triangle.

Solution On colorie en rouge le plus court côté de chaque triangle. Il suffit de montrer qu'on a un triangle rouge. Appelons $P_1, \ldots, P_6$ les points. Parmi les cinq segments P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5, P_1P_6 ayant P_1 pour extrémité, il y en a au moins 3 rouges ou bien au moins 3 non coloriés.

— Supposons qu'il y en ait 3 rouges, disons P_1P_2, P_1P_3 et P_1P_4. Le triangle $P_2P_3P_4$ a au moins un côté rouge, disons P_2P_3, donc le triangle $P_1P_2P_3$ est rouge.

— Supposons qu'il y en ait 3 non coloriées, disons P_1P_2, P_1P_3 et P_1P_4. Chacun des trois triangles $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, $P_1P_4P_2$ a au moins un côté rouge, et ce côté n'est pas l'un de ceux ayant P_1 pour extrémité, donc P_2P_3, P_3P_4, P_4P_2 sont rouges. Ainsi, le triangle $P_2P_3P_4$ est rouge.

Exercice 6 Dans un cirque, il y a plusieurs clowns. Chacun utilise au moins 5 couleurs, parmi 12 possibles, pour se peindre. Une même couleur est utilisée par au plus 20 clowns. Deux clowns n'ont jamais exactement les mêmes couleurs. Combien y a-t-il de clowns au maximum ?

Solution Soit n le nombre de clowns et N le nombre de paires (L, c) où L est un cLown et c une couleur qu'il porte. D'une part, chaque clown ayant au moins 5 couleurs, $N \geq 5 \times n$. D'autre part, chacune des 12 couleurs peut apparaître dans au plus 20 paires. Donc $N \leq 20 \times 12$. On en déduit que $5n \leq 240$, donc $n \leq 48$.

Maintenant, on considère les quintuplets : $A = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$, $B = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_6)$, $C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_7)$, $D = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_8)$. On imagine que les 12 couleurs sont disposées dans l'ordre sur un cercle (comme les nombres sur une pendule par exemple), et on note A_i le quintuplet obtenu en décalant les couleurs de A de i rangs dans le sens croissant ($A_0 = A$, $A_1 = (c_{1+1}, c_{2+1}, c_{3+1}, c_{4+1}, c_{5+1}) = (c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)$, $A_9 = (c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_1, c_2$, etc.), et on fait de même pour B, C, D. Concrètement, chaque tel quintuplet de couleurs consiste donc de quatre couleurs consécutives sur le cercle, puis fait un "saut" pour le numéro de la dernière couleur qui est de taille 1 pour les A_i, de 2 pour les B_i, de 3 pour les C_i et de 4 pour les C_i.

Considérons l'ensemble des K_i avec $K = A, B, C$ ou D et $0 \leq i \leq 11$. Cela donne 48 paquets de 5 couleurs. Et on vérifie aisément que deux paquets ne peuvent être identiques : si pour certains i et j et certains K et K' on avait $K_i = K'_j$, alors $K = K'$ pour avoir le même "saut" entre le "paquet" des quatre couleurs consécutives et la cinquième (1 pour A, 2 pour B, 3 pour C, 4 pour D), donc $K_i = K_j$, et on voit bien que $i = j$, pour que les deux paquets de quatre couleurs consécutives soient les mêmes.
Enfin, chaque couleur est utilisée exactement 20 fois. En effet, on peut remarquer que toutes les couleurs jouent ici le même rôle(puisqu'on a "décalé" cycliquement les ensembles A, B, C, D), donc chacune sera représentée autant que les autres. On a au total $5 \times 48 = 240$ utilisations de couleur, donc chacune des 12 couleurs est utilisée $240/12 = 20$ fois. Pour s'en convaincre plus concrètement, on peut fixer une couleur : elle apparaît une et une seule fois comme "première" couleur d'un paquet de type A_i, puis comme "deuxième", etc., donc 5 paquets A_i utilisent cette couleur, et de même pour B, C et D. Elle est donc utilisée 20 fois.
Conclusion : on peut bien avoir $n = 48$ clowns, en donnant à chaque clown un des 48 paquets de couleurs qu'on vient de construire.

Exercice 7 On considère $n^2 + 2n + 1$ points dans un carré de côté n. Montrer que trois d'entre eux sont les sommets d'un triangle (éventuellement dégénéré) d'aire au plus $1/2$.

Solution On raisonne sur l'enveloppe convexe des $(n+1)^2$ points : si elle contient beaucoup de points, il y aura 3 sommets voisins de cette enveloppe assez proches pour faire un triangle d'aire petite. Si elle n'en contient pas beaucoup, on la triangule et on regarde les nombreux points dans les petits triangles pour en former un suffisamment petit.

Concrètement, voici une démonstration : Soit E l'enveloppe convexe de nos points. On vérifie aisément que son périmètre est inférieur à celui du carré, à savoir $4n$. Si E a au moins $4n$ sommets, donc autant de côtés, il existe deux côtés consécutifs c_1 et c_2 vérifiant $c_1 + c_2 \leq 2$ donc $c_1 c_2 \leq 1$ par inégalité arithmético-géométrique. Si h est la hauteur relative à c_1 dans le triangle formé par les extrémités de c_1 et c_2, $h \leq c_2$, donc l'aire du triangle est bien d'au plus $1/2$.
Si E a $s \leq 4n - 1$ sommets, on la triangule en $s - 2$ triangles. . Maintenant, prenons un point restant et relions-le aux sommets du triangle dans lequel il se trouve (ou des triangles s'il est sur le côté commun de deux triangles de la triangulation). On prend un autre point restant et on le relie de même aux sommets des triangles de la nouvelle triangulation dans lesquels il se trouve. On continue ainsi jusqu'à ce que tous les points soient intégrés à la triangulation. Ainsi, on a obtenu ce qu'on appelle une *triangulation* de notre ensemble de points. On avait $s - 2$ triangles initialement, on en a rajouté au moins 2 à chaque étape (voire

3), donc on a au moins $s-2+2((n+1)^2-s) \geq 2n^2+4n-1-s \geq 2n^2$ triangles disjoints, donc l'un d'eux est d'aire au plus $1/2$.

Exercice 8 On dispose de n jetons portant chacun un numéro entier (qui peut être négatif). Si on trouve parmi eux deux jetons portant le même numéro m, on les enlève et on met à leur place un jeton portant le numéro $m-1$, et un autre portant le numéro $m+1$. Montrer qu'au bout d'un nombre fini de tels changements, tous les jetons porteront des numéros distincts.

Solution On commence par montrer le lemme suivant :

Soit m_0 le plus petit des numéros des jetons au début. On note $m_1^{(k)}, \ldots, m_{j_k}^{(k)}$ les numéros inférieurs ou égaux à m_0 qui sont portés par des jetons après k changements, comptés avec multiplicité et rangés par ordre décroissant de sorte que $m_{j_k}^{(k)} \leq \ldots \leq m_1^{(k)} \leq m_0^{(k)} = m_0$. Alors pour tout $i \in \{0, \ldots, j_k - 1\}$, on a $m_{i+1}^{(k)} - m_i^{(k)} \leq 2$.

Démonstration : on raisonne par récurrence sur k. Le cas $k=0$ est clair.

Supposons que le résultat soit vérifié pour un certain k. Au $(k+1)$-ème changement, si nous remplaçons deux jetons portant un numéro strictement plus grand que m_0, aucun des $m_i^{(k)}$ ne change, donc la propriété est toujours vérifiée. Supposons maintenant que nous remplaçons deux jetons portant un numéro $m_i^{(k)} = m_{i+1}^{(k)} = m$. Alors la suite $(m_i^{(k+1)})$ s'obtient à partir de la suite $(m_i^{(k)})$ en remplaçant deux occurrences de m par une occurrence de $m-1$ et une occurrence de $m+1$. La différence entre ces dernières est exactement 2, donc même s'il reste encore des termes égaux à m, leur distance aux termes autour d'eux sera inférieure ou égale à 1. Celle entre $m-1$ et le terme suivant est inférieure strictement à celle entre m et ce même terme suivant, donc inférieure à 2 par hypothèse de récurrence. Pour ce qui est de $m+1$, nous avons deux cas à distinguer. Soit $m = m_0$ et alors $m+1$ est strictement supérieur à m_0 et ne nous intéresse plus. Soit $m < m_0$, et alors $m+1$ a une distance au terme précédent inférieure à la distance entre m et ce même terme suivant, donc inférieure à 2 par hypothèse de récurrence.

Conséquence du lemme : tous les numéros portés par des jetons sont supérieurs ou égaux à $m_0 - 2n$ à tout moment. Quitte à ajouter $2n - m_0 + 1$ à tous les numéros au départ, ce qui ne change pas l'exercice, on peut donc supposer qu'ils sont tous strictement positifs à tout moment.

On note alors P_k le produit des numéros de tous les jetons après k changements. D'après ce qu'on vient de montrer, P_k est un entier strictement positif pour tout k. Supposons de le $k+1$-ème changement consiste à remplacer deux jetons portant le numéro m par un jeton portant le numéro $m-1$ et un jeton portant le numéro $m+1$. Alors P_k s'écrit m^2c avec $c > 0$, et P_{k+1} s'écrit

$$P_{k+1} = (m-1)(m+1)c = (m^2-1)c < m^2c = P_k.$$

Ainsi, la suite des (P_k) est une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs, elle est donc finie, c'est-à-dire qu'on arrive nécessairement à un moment où aucun changement n'est possible.

Exercice 9 On considère un quadrillage formé de tous les petits carrés de côté 1 entièrement inclus dans le disque donné par l'inéquation $x^2 + y^2 \leq 2014^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy. A chaque étape du jeu, chaque carré contient le nombre 1 ou le nombre -1. On suppose que chaque case du quadrillage contient un 1 au début. Un tour consiste à choisir une ligne, une colonne, ou une diagonale (c'est-à-dire un ensemble de cases maximal tel que les centres de ces dernières soient alignés sur une droite formant un angle de 45 degrés avec l'un des axes de coordonnées) du quadrillage, et à changer les signes du contenu de toutes les cases de celle-ci. Peut-on à la fin avoir un -1 dans une case, et des 1 dans toutes les autres ?

Solution On raisonne par l'absurde en supposant qu'on peut arriver à avoir un seul -1. On appelle C_1 le petit carré qui contiendra ce -1. Par symétrie de la figure, on peut supposer que le centre de ce petit carré a pour coordonnées $(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2})$ avec $a \geq b \geq 1$.

1ère étape : On montre que le petit carré de centre $(a - \frac{3}{2}, b + \frac{1}{2})$ appartient également à la figure. Pour cela, il suffit de montrer que le coin supérieur droit de ce petit carré appartient à la figure, c'est-à-dire que $(a-1)^2 + (b+1)^2 \leq 2014^2$. On distingue deux cas :

- Si $a > b$ alors $(a-1)^2 + (b+1)^2 \leq a^2 + b^2 \leq 2014^2$.
- Si $a = b$, alors l'inégalité $a^2 + b^2 = 2a^2 \leq 2014^2$ ne peut être une égalité car la valuation 2-adique du côté gauche est impaire alors que celle du côté droit est paire. Nous avons donc $2a^2 + 2 \leq 2014^2$, d'où $(a-1)^2 + (a+1)^2 = 2a^2 + 2 \leq 2014^2$.

On appelle C_2 ce petit carré de centre $(a - \frac{3}{2}, b + \frac{1}{2})$.

2ème étape : Par des considérations de symétrie et de convexité, les petits carrés $C_1, \ldots, C_8$ suivants appartiennent tous à la figure :

	C_3	C_2	
C_4			C_1
C_5			C_8
	C_6	C_7	

Or chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale contient soit aucun, soit deux de ces huit petits carrés. Ainsi, la parité du nombre de -1 parmi ces carrés ne change pas, contradiction.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle S l'ensemble des suites de $2n$ chiffres comportant n zéros et autant de uns. Deux suites de S sont voisines lorsqu'il suffit de changer la position d'un chiffre de l'une pour obtenir l'autre. Par exemple, 11100010 et 10110010 sont voisines puisqu'en décalant le premier 0 de la deuxième suite de deux "pas" vers la droite, on obtient la première suite. Soit T un sous-ensemble dense de cardinal minimal. Montrer que $\frac{1}{n^2+1}|S| \leq |T| \leq \frac{1}{n+1}|S|$. Remarque : on note $|A|$ le cardinal de A.

Solution On traite séparément les inégalités.

• Montrons que $\frac{1}{2n^2+1}|S| \leq |T|$. Soit s un élément de S. Soit $s_{i,j}$ la suite que l'on peut obtenir à partir de s, en déplaçant le i-ème chiffre de s pour le mettre en position j. Si $s_{i,j} \neq s$, alors $j \neq i$. En outre, sans perte de généralité, on suppose que le i-ème chiffre de s est un 0 ; si $j > i$ et si le j-ème chiffre de s est un 0, alors $s_{i,j} = s_{i,j-1}$; si $j < i$ et si le j-ème chiffre de s est un 0, alors $s_{i,j} = s_{i,j+1}$. Ainsi, toute suite $s_{i,j}$ distincte de s peut s'écrire sous la forme $s_{i,k}$, telle que le k-ème chiffre de s soit un 1 : à i fixé, il existe au plus n telles suites. Puisque i peut prendre $2n$ valeurs, la suite s a donc, en effet, au plus $2n^2$ voisins différents d'elle-même. Ainsi, il faut au moins $\frac{1}{2n^2+1}|S|$ éléments pour faire un ensemble dense.

• Montrons que $|T| \leq \frac{1}{n+1}|S|$. Considérons les 0 comme des poteaux fixes, délimitant $n+1$ intervalles de 1 (on compte les extérieurs), certains éventuellement vides. Si $s \in S$, soit r_k le nombre de 1 dans le k-ème intervalle en partant de la gauche. On introduit $N(s) := r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n$ et $R(s)$ la congruence de $N(s)$ modulo $n+1$. Si on déplace un 0 du i-ème intervalle (il y a bien un intervalle non vide) vers le j-ème, on obtient s' telle que $N(s') = N(s) + j - i$. En faisant varier j entre 1 et $n+1$, on obtient toutes les congruences possibles pour $R(s')$. Si, pour tout $0 \leq k \leq n$, S_k est l'ensemble des $s \in S$ telles que $R(s) = k$, toute suite de S_k a une voisine dans $S_{k'}$ pour tout $k' \neq k$. Comme "être voisine" est une relation symétrique (si s voisine de s', alors s' est voisine de s), toute suite s qui n'est pas dans S_k a une voisine dans S_k, donc S_k est dense. Or les S_k forment une partition de S en $n+1$ sous-ensembles, donc il existe un k_0 tel que $|S_{k_0}| \leq \frac{1}{n+1}|S|$, ce qui conclut.