OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DES 13 ET 14 MAI 2014

CORRIGÉ

Exercice J1. Déterminer le plus grand nombre d'entiers que l'on peut extraire de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ de sorte que la différence de deux quelconques de ces entiers soit différente de 17.

Solution de l'exercice J1. Cet exercice découle en fait d'une utilisation astucieuse du principe des tiroirs. Soit E une partie de $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ ne contenant que des entiers dont la différence n'est jamais égale à 17.
Tout d'abord, pour tout entier a, on note S_a l'ensemble $\{a, a + 17\}$, et T_a l'ensemble $\{a, a + 1, \ldots, a + 33\}$: alors on sait que $E \cap S_a$ contient au plus un élément, quelque soit l'entier a considéré : autrement dit, $|E \cap S_a| \leq 1$. Puisque $2014 = 34 \times 59 + 8$, on sait que

$$\{1, 2, \ldots, 2014\} \subseteq \bigcup_{i=0}^{58} T_{34i+1} \cup \bigcup_{a=2009}^{2014} S_a = \bigcup_{i=0}^{58} \left(\bigcup_{a=34i+1}^{34i+17} S_a \right) \cup \bigcup_{a=2009}^{2014} S_a,$$

de sorte que

$$|E| = |E \cap \{1, 2, \ldots, 2014\}| \leq \sum_{i=0}^{58} \left(\sum_{a=34i+1}^{34i+17} |E \cap S_a| \right) + \sum_{a=2009}^{2014} |E \cap S_a| = 59 \times 17 + 8 = 1011.$$

D'autre part, en choisissant exactement $E = \bigcup_{i=0}^{58} \left(\bigcup_{a=34i+1}^{34i+17} \{a\} \right) \cup \bigcup_{a=2009}^{2014} \{a\}$, on obtient bien une partie de $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ ne contenant que des entiers dont la différence n'est jamais égale à 17, et dont le cardinal est précisément $|E| = 1011$.
Ainsi, le nombre recherché était bien 1011.

Exercice J2. Soit P un point à l'extérieur d'un cercle $\mathcal{C}$. Les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P touchent $\mathcal{C}$ en A et B. Une droite passant par P intersecte $\mathcal{C}$ aux points Q et R. Soit S un point de $\mathcal{C}$ tel que $(BS) \parallel (QR)$. Montrer que (SA) passe par le milieu de $[QR]$.

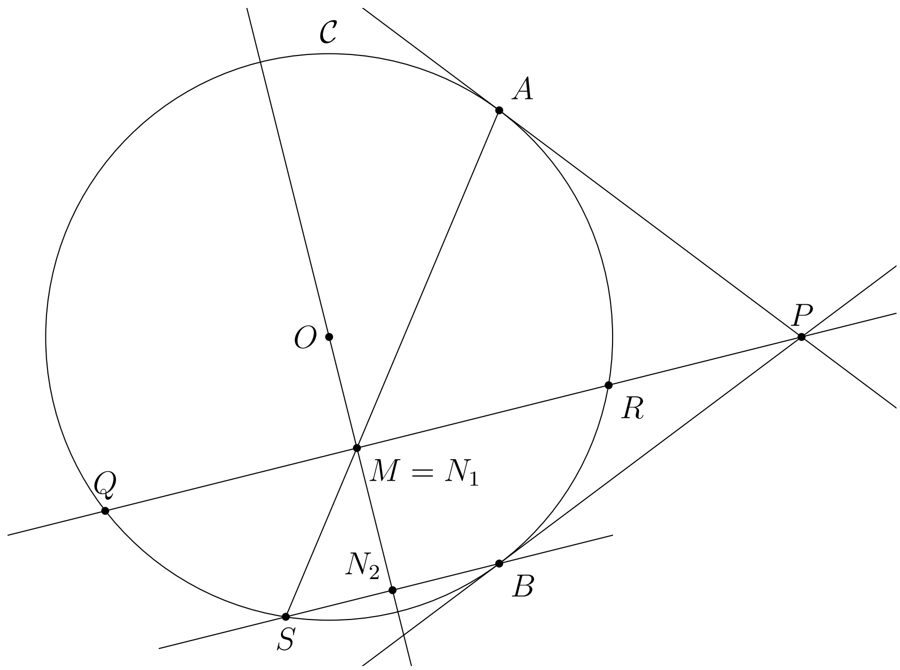
Solution de l'exercice J2. La puissance du point P par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est égale à $PB^2 = PQ \cdot PR$. Ainsi, on a égalité des rapports de longueurs $\frac{PR}{PB} = \frac{PB}{PQ}$, ce qui montre que les triangles PRB et PBQ sont indirectement semblables. En particulier, on en déduit que $\frac{PB}{PR} = \frac{BQ}{BR}$. Puis, A et B jouant des rôles symétriques, on a également $\frac{PA}{PR} = \frac{AQ}{AR}$.
Soit alors O le centre du cercle $\mathcal{C}$ ainsi que N_1 le milieu de $[QR]$ et N_2 le milieu de $[BS]$. Les cordes QR et BS étant parallèles, on sait que $(N_1O) = (N_2O)$ est la médiatrice commune à $[QR]$ et à $[BS]$, c'est-à-dire un axe de symétrie du trapèze $QSBR$. Il s'ensuit que $\frac{BQ}{BR} = \frac{SR}{SQ}$. On en déduit donc que

$$\frac{RS}{QS} \frac{RA}{QA} = \frac{BQ}{BR} \frac{PR}{PA} = \frac{PB}{PR} \frac{PR}{PA} = \frac{PB}{PA} = 1,$$

c'est-à-dire que $AR \cdot RS = AQ \cdot QS$.
Notons ensuite que les points A, R, S et Q sont cocycliques, de sorte que $\sin(\widehat{ARS}) = \sin(\widehat{AQS})$, donc que

$$2\mathcal{A}_{ARS} = (AR \cdot RS) \sin(\widehat{ARS}) = (AQ \cdot QS) \sin(\widehat{AQS}) = 2\mathcal{A}_{AQS}.$$

Enfin, soit M le point d'intersection de (AS) et (QR). On sait que $2\mathcal{A}_{ARS} = (AS \cdot MR) \sin(\widehat{AMS})$ et $2\mathcal{A}_{AQS} = (AS \cdot MQ) \sin(\widehat{SMQ})$, d'où l'on déduit que $(AS \cdot MR) \sin(\widehat{AMS}) = (AS \cdot MQ) \sin(\widehat{SMQ})$. Puisque $\widehat{AMR} = \widehat{SMQ}$, cela montre en fait que $MR = MQ$, c'est-à-dire M est le milieu de $[QR]$.



Exercice J3. Montrer que si $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ alors

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leqslant 1.$$

Solution de l'exercice J3. Afin de faire apparaître les termes a_i^2, il est tentant de commencer par élever l'expression $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$ au carré, puis de tout développer en espérant très fort qu'une simplification appraîtra. En outre, on voit bien qu'il faudra utiliser le caractère ordonné des termes a_i (c'est-à-dire que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$), puisque l'inégalité à démontrer est évidemment fausse si on prend $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$ et $a_n = 1$. On obtient alors directement

$$\begin{aligned} 1 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_j^2 = a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2. \end{aligned}$$

Solution alternative Soit Ω l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ de réels tels que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{l} \Omega \mapsto \mathbb{R} \\ (a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \end{array}$$

La fonction f est convexe car somme de fonctions convexes, donc elle prend son maximum en un point *extrémal* de Ω, c'est-à-dire en un point $p \in \Omega$ tel que, pour tous $a, b \in \Omega$ et pour tout $\lambda \in]0,1[$, si $p = \lambda a + (1-\lambda)b$, alors $a = b = p$. On montre alors aisément que les points extrémaux de Ω sont nécessairement de la forme $a_1 = \ldots = a_k = \frac{1}{k}, a_{k+1} = \ldots = a_n = 0$, avec $1 \leq k \leq n$. Et alors $f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2i+1}{k^2} = \frac{k(k-1)+k}{k^2} = 1$.
On en déduit donc que $f(a_1, \ldots, a_n) \leq 1$ dès lors que $(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$.

Exercice 1. Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus petit entier k ayant la propriété suivante : pour tous réels $a_1, \ldots, a_d$ vérifiant $a_1+a_2+\cdots+a_d = n$ et $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, d$, il est possible de regrouper les nombres en k paquets (éventuellement vides) de sorte que la somme des nombres de chaque paquet soit $\leqslant 1$.

Solution de l'exercice 1

▷ Les réels $a_1 = \ldots = a_{2n-1} = \frac{n}{2n-1}$ appartiennent à l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1]$ et leur somme vaut n. Comme chaque réel est strictement plus grand que $\frac{1}{2}$, chaque paquet contient au plus un de ces $2n-1$ réels (car la somme de deux d'entre eux est strictement supérieure à 1) : il faut donc au moins $2n-1$ paquets.

▷ Supposons que l'on ait partitionné notre ensemble de réels $a_1, \ldots, a_d$ en $k \geq 2n$ paquets et notons $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k$ les sommes associées à ces paquets classées par ordre croissant. Alors, en regroupant ces nombres deux par deux, on obtient

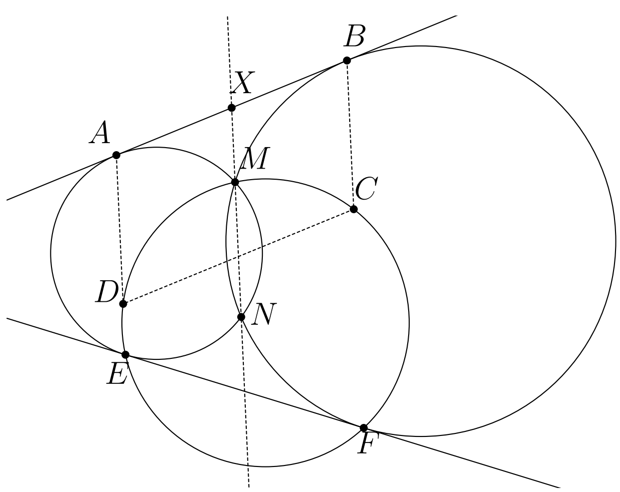
$$\begin{aligned} n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) + \ldots \\ &\geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor (\alpha_1 + \alpha_2) \geq n(\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$ et on peut regrouper les deux paquets correspondants en un nouveau paquet de somme totale inférieure ou égale à 1 et on est ramené à $k-1$ paquets.

▷ En conclusion, il est nécessaire d'avoir $2n-1$ paquets et, si l'on a partitionné en plus de $2n$ paquets, on peut procéder à un regroupement et faire diminuer le nombre de paquets nécessaires. La valeur recherchée est donc $2n-1$.

Exercice 2. Deux cercles O_1 et O_2 se coupent en M et N. La tangente commune aux deux cercles la plus proche de M touche O_1 et O_2 en A et B respectivement. Soient C et D les symétriques de A et B par rapport à M respectivement. Le cercle circonscrit au triangle DCM intersecte les cercles O_1 et O_2 respectivement en des points E et F distincts de M. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles MEF et NEF sont de même rayon.

Solution de l'exercice 2



Montrons d'abord que (EF) l'autre tangente commune aux deux cercles.
Soient E' et F' les points de contact de l'autre tangente commune. Soit X le point d'intersection de (AB) et de (MN). On a $AX = BX$ car X se situe sur l'axe radical des deux cercles. Comme $ABCD$ est un parallélogramme de centre M, on a $(MX) \mathbin{/\!/} (AD)$, ce qui entraîne $(AD) \perp (O_1O_2)$.

De plus, A et E étant symétriques par rapport à (O_1O_2) on obtient que A, D, E sont alignés, et de même B, C, F sont alignés.
D'après le cas limite du théorème de l'angle inscrit dans le cercle O_1, on a $(EM, EA) = (AM, AB)$, donc $(CM, CD) = (CA, CD) = (AM, AB) = (EM, EA) = (EM, ED)$, par conséquent E' appartient au cercle MCD. On en conclut que $E = E'$, et de même $F = F'$.

En appliquant la symétrie d'axe (O_1O_2) puis la symétrie de centre M au cercle (NEF), on obtient successivement le cercle MAB, puis le cercle MCD, c'est-à-dire le cercle MEF. Comme une symétrie conserve les longueurs, les cercles MEF et NEF ont même rayon.

Exercice 3. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs n tels que le plus grand facteur premier de $n^4 + n^2 + 1$ soit égal au plus grand facteur premier de $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$.

Solution de l'exercice 3 Pour tout $n \geq 1$, on note p_n le plus grand diviseur premier de $n^4 + n^2 + 1$, et q_n le plus grand diviseur premier de $n^2 + n + 1$.
On donc $p_n = q_{n^2}$.
De plus, de l'identité

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 + n + 1)(n^2 - n + 1) = (n^2 + n + 1)((n - 1)^2 + (n - 1) + 1),$$

il découle que $p_n = \max(q_n, q_{n-1})$ pour tout $n \geq 2$.

D'autre part, le nombre $n^2 - n + 1 = n(n - 1) + 1$ est impair, donc

$$\text{pgcd}(n^2 + n + 1, n^2 - n + 1) = \text{pgcd}(2n, n^2 - n + 1) = \text{pgcd}(n, n^2 - n + 1) = 1.$$

Ainsi, on a $q_n \neq q_{n-1}$.
Pour conclure, il suffit alors de prouver que l'ensemble

$$S = \{n \geq 2 | q_n > q_{n-1} \text{ et } q_n > q_{n+1}\}$$

est infini, puisque pour tout $n \in S$, on a

$$p_n = \max(q_n, q_{n-1}) = q_n = \max(q_n, q_{n+1}) = p_{n+1}.$$

Par l'absurde : supposons que S soit fini.
Puisque $q_2 = q_4 = 7 < 13 = q_3$, on peut affirmer que S n'est pas vide. Puisqu'il est fini, il possède alors un plus grand élément, disons m.
La suite $(q_n)_{n \geq m}$ ne peut être strictement décroissante puisqu'elle est formée d'entiers positifs. Il existe donc $k \geq m$ tel que $q_k < q_{k+1}$ (on rappelle que $q_k \neq q_{k+1}$). Mais, il est également impossible d'avoir $(q_n)_{n \geq k}$ strictement croissante car $q_{(k+1)^2} = p_{k+1} = \max(q_k, q_{k+1}) = q_{k+1}$. Notons alors t le plus petit entier supérieur ou égal à $k + 1$ tel que $q_t > q_{t+1}$. La minimalité de t assure que l'on a $q_{t-1} < q_t$, et donc que $t \in S$.
Pourtant, on a $t \geq k + 1 > k \geq m$, ce qui contredit la maximalité de m.
Par suite, on a S infini, ce qui conclut.

Exercice 4. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

pour tous entiers strictement positifs m et n.

Solution de l'exercice 4 Soit f une solution éventuelle du problème.
On note (*) la condition "$m^2 + f(n)$ divise $mf(m) + n$".

En choisissant $m = n = 2$ dans (*), il vient que $4 + f(2)$ divise $2f(2) + 2$. Or, on a $2f(2) + 2 < 2(f(2) + 4)$, et il faut donc que $f(2) + 4 = 2f(2) + 2$, d'où $f(2) = 2$.

En choisissant maintenant $m = 2$, la condition (*) assure que, pour tout $n \geq 1$, le nombre $4+f(n)$ divise $4 + n$, ce qui conduit à $f(n) \leq n$, pour tout $n \geq 1$. (i)

D'autre part, en choisissant $m = n$ dans (*), on déduit cette fois que, pour tout $n \geq 1$, le nombre $n^2 + f(n)$ divise $nf(n) + n$, d'où $n^2 + f(n) \leq nf(n) + n$. Ainsi, on a $(n - 1)(f(n) - n) \geq 0$, ce qui conduit à $f(n) \geq n$, pour tout $n \geq 2$. Puisqu'on a clairement $f(1) \geq 1$, c'est donc que $f(n) \geq n$ pour tout $n \geq 1$. (ii)

De (i) et (ii), on déduit que $f(n) = n$ pour tout $n \geq 1$.

Réciproquement, il est évident que $f : n \longmapsto n$ est bien une solution du problème.

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer qu'il existe des nombres $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

Solution de l'exercice 5
Commençons par ordonner les réels x_k de sorte à ce que $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n > 0$.
Montrons par récurrence forte qu'une solution est fournie par la suite de coefficients définie par $a_k = 1$ si k est impair et $a_k = -1$ si k est pair.
▷ Si $n = 1$, $a_1x_1^2 = (a_1x_1)^2$ donc l'inégalité est vérifiée.
▷ Si $n = 2$, $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = x_1^2 - x_2^2 \geq x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2$ car $x_1 \geq x_2$; l'inégalité est encore vérifiée.
▷ Soit $n \geq 3$. Supposons que le résultat est établi jusqu'au rang $n - 1$ et montrons l'inégalité au rang n.
La différence des deux membres est alors

$$a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^2 = \alpha x_1 + \beta$$

avec

$$\alpha = -2\,(a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) = 2((x_2 - x_3) + (x_4 - x_5) + \ldots) \leq 0$$

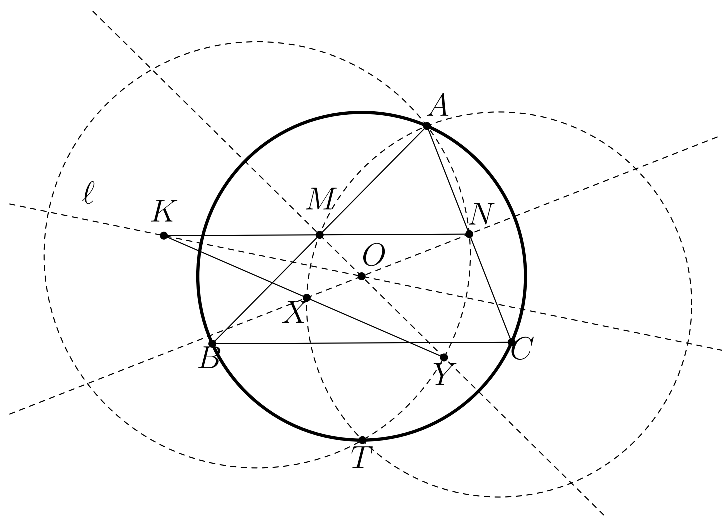
car $x_2 \geq x_3$, $x_4 \geq x_5$, ... Par conséquent, en utilisant la croissance de la fonction $x \mapsto \alpha x + \beta$ et $x_1 \geq x_2$,

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)^2 &\geq \alpha x_2 + \beta \\ &\geq a_1x_2^2 + a_2x_2^2 \ldots + a_nx_n^2 - (a_1x_2 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2 \\ &\geq a_3x_1^3 + \ldots + a_nx_n^2 - (a_3x_3 + \ldots + a_nx_n)^2 \end{aligned}$$

car $a_1 = -a_2$ et donc $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 = a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Le dernier terme est positif d'après l'hypothèse de récurrence avec les réels $x_3, \dots, x_n$ ce qui termine la preuve de l'inégalité au rang n.

Exercice 6. Soit ω le cercle circonscrit à un triangle ABC. On désigne par M et N les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, et par T le milieu de l'arc BC de ω ne contenant pas A. Les cercles circonscrits aux triangles AMT et ANT rencontrent les médiatrices de $[AC]$ et $[AB]$ aux points X et Y respectivement ; on suppose que X et Y sont à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (MN) et (XY) se coupent en K. Montrer que $KA = KT$.

Solution de l'exercice 6



Notons O le centre du cercle ω. On a $O = (MY) \cap (NX)$. Soit ℓ la médiatrice de $[AT]$. Elle passe par O.

Notons s la symétrie par rapport à ℓ. Comme (AT) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, la droite $s(AB)$ est parallèle à (AC). Comme $(OM) \perp (AB)$ et $(ON) \perp (AC)$, la droite $s(OM)$ est parallèle à (ON) . Or, elle passe par O, donc $s(OM) = (ON)$.

De plus, le cercle circonscrit γ à AMT est symétrique par rapport à ℓ, c'est-à-dire $s(\gamma) = \gamma$, donc $s(M)$ appartient à la fois à γ et à $s(OM) = (ON)$. Nécessairement, $s(M) = X$. De même, $s(N) = Y$. On en déduit que $s(MN) = (XY)$. Le point commun K de (MN) et (XY) appartient ainsi à la droite ℓ, ce qui implique que $KA = KT$.