# OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE SÉLECTION POUR L'OIM 2014

PREMIER JOUR

MARDI 13 MAI 2014

DURÉE : 4 HEURES

## Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

*Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.*

*Exercice 1.* Soit $n$ un entier strictement positif. Trouver le plus petit entier $k$ ayant la propriété suivante : pour tous réels $a_1, \ldots, a_d$ vérifiant $a_1 + a_2 + \cdots + a_d = n$ et $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, \ldots, d$, il est possible de regrouper les nombres en $k$ paquets (éventuellement vides) de sorte que la somme des nombres de chaque paquet soit $\leqslant 1$.

*Exercice 2.* Deux cercles $O_1$ et $O_2$ se coupent en $M$ et $N$. La tangente commune aux deux cercles la plus proche de $M$ touche $O_1$ et $O_2$ en $A$ et $B$ respectivement. Soient $C$ et $D$ les symétriques de $A$ et $B$ par rapport à $M$ respectivement. Le cercle circonscrit au triangle $DCM$ intersecte les cercles $O_1$ et $O_2$ respectivement en des points $E$ et $F$ distincts de $M$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $MEF$ et $NEF$ sont de même rayon.

*Exercice 3.* Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs $n$ tels que le plus grand facteur premier de $n^4 + n^2 + 1$ soit égal au plus grand facteur premier de $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.