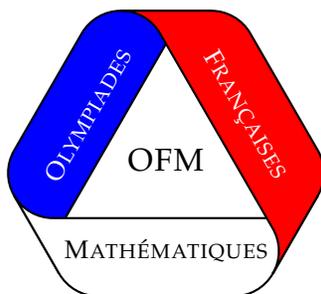


OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



TEST DE SÉLECTION POUR L'OIM 2014

PREMIER JOUR

MARDI 13 MAI 2014

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercice 1. Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus petit entier k ayant la propriété suivante : pour tous réels a_1, \dots, a_d vérifiant $a_1 + a_2 + \dots + a_d = n$ et $0 \leq a_i \leq 1$ pour $i = 1, 2, \dots, d$, il est possible de regrouper les nombres en k paquets (éventuellement vides) de sorte que la somme des nombres de chaque paquet soit ≤ 1 .

Exercice 2. Deux cercles O_1 et O_2 se coupent en M et N . La tangente commune aux deux cercles la plus proche de M touche O_1 et O_2 en A et B respectivement. Soient C et D les symétriques de A et B par rapport à M respectivement. Le cercle circonscrit au triangle DCM intersecte les cercles O_1 et O_2 respectivement en des points E et F distincts de M . Montrer que les cercles circonscrits aux triangles MEF et NEF sont de même rayon.

Exercice 3. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs n tels que le plus grand facteur premier de $n^4 + n^2 + 1$ soit égal au plus grand facteur premier de $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$.