OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE JANVIER

MERCREDI 15 JANVIER 2014

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
  Chaque exercice est noté sur 7 **points**.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Le groupe B est constitué des élèves nés en 1999 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2012-2013 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé « commun » est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soient C et C' deux cercles de centres O et O', extérieurs l'un à l'autre. Une tangente commune extérieure coupe les deux tangentes communes intérieures aux points M et N.
Montrer que (OM) est perpendiculaire à $(O'M)$ et que (ON) est perpendiculaire à $(O'N)$.

Exercice 2. Soit $k \geqslant 1$ un entier. À chaque client, un opérateur téléphonique propose k numéros pour lesquels la communication est gratuite (si une personne A choisit le numéro de B, alors les appels de A vers B et de B vers A sont gratuits). On considère un groupe de n personnes.

1) Si $n \geqslant 2k+2$, montrer qu'il existe deux personnes qui ne pourront pas communiquer gratuitement.

2) Si $n = 2k+1$, montrer que les n personnes peuvent faire en sorte que toute personne peut communiquer gratuitement avec n'importe quelle autre.

Exercice 3. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer tous les entiers $p \geqslant 1$ pour lesquels il existe des entiers strictement positifs $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tels que

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \cdots + \frac{n}{x_n} = p.$$

Exercice commun

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et tel que $AB \neq AC$. On note D le pied de la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Le point E (resp. F) désigne le pied de la hauteur issue de B (resp. de C). Le cercle circonscrit au triangle DBF rencontre le cercle circonscrit au triangle DCE en un point M autre que D.

Prouver que $ME = MF$.

Exercices du groupe A

Exercice 5. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est Sicilienne si u_1 est un entier strictement positif, et si pour tout n,

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{si } u_n \text{ est pair, et} \\ u_n + [\sqrt{u_n}] & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Existe-t-il une suite Sicilienne $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_n > 1$ pour tout n ?

(N.B. $[x]$ désigne la partie entière de x. Par exemple, $[2,71828] = 2$.)

Exercice 6. Déterminer tous les couples d'entiers positifs ou nuls (x, y) pour lesquels $x^2 + y^2$ divise à la fois $x^3 + y$ et $x + y^3$.

Exercice 7. On répartit des poids de respectivement $1g, 2g, \ldots, 200g$ sur les deux plateaux d'une balance de sorte que chaque plateau contienne 100 poids.

Prouver que l'on peut échanger 50 poids d'un plateau avec 50 poids de l'autre plateau pour que la balance devienne équilibrée.