OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE FÉVRIER

MERCREDI 26 FÉVRIER 2014

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Le groupe B est constitué des élèves nés en 1999 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2012-2013 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z).$$

Exercice 2. Sur une droite se trouvent 400 points bleus et 200 points verts. Montrer que l'on peut trouver un segment qui contient exactement 200 points bleus et 100 points verts.

Exercices communs

Exercice 3.
Soit $a, b, c, d > 0$ des réels tels que $abcd = 1$.
Prouver que

$$\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{c+d+2} + \frac{1}{d+a+2} \leqslant 1.$$

Exercice 4. Soient deux cercles extérieurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O'. On mène deux rayons parallèles de même sens $[OM]$ et $[O'M']$, et deux autres rayons parallèles de même sens $[OP]$ et $[O'P']$. La droite (MM') recoupe $\mathcal{C}'$ en N et la droite (PP') recoupe $\mathcal{C}'$ en Q. Montrer que M, N, P, Q sont cocycliques.

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soit $n > 0$ un entier, et a, b, c des entiers strictement positifs tels que

$$(a + bc)(b + ac) = 19^n.$$

Prouver que n est pair.

Exercice 6. Soient n et p des entiers $\geqslant 1$. Dans une assemblée de n personnes, deux personnes quelconques ont au plus p connaissances communes ; bien sûr, si A connaît B, alors B connaît A. Montrer que le nombre de paires non ordonnées $\{A, B\}$ de personnes qui se connaissent est inférieur ou égal à $\sqrt{pn^3}$.