shapes.geometric,calc

OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE FÉVRIER

MERCREDI 26 FÉVRIER 2014

CORRIGÉ

Exercices du groupe B

Exercice 1. Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16(x + y + z).$$

Solution de l'exercice 1 Tout d'abord, remarquons que l'équation peut se réécrire

$$x(x - 16) + y(y - 16) + z(z - 16) = 0.$$

Cela invite donc à effectuer un changement de variables, en posant $X = x - 8$, $Y = y - 8$ et $Z = z - 8$. L'équation devient alors

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \times 8^2.$$

On introduit alors le lemme suivant, sur les sommes de trois carrés : si a, b et c sont trois entiers tels que $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod 4$, alors a, b et c sont tous les trois pairs. En effet, le carré d'un entier pair vaut $0 \pmod 4$, et que le carré d'un entier impair vaut $1 \pmod 4$.
En appliquant 3 fois de suite le lemme, on montre donc que X, Y et Z sont multiples de 8. Encore une fois, on change de variables, en posant $u = \frac{X}{8} = \frac{x}{8} - 1$, $v = \frac{Y}{8} = \frac{y}{8} - 1$ et $w = \frac{Z}{8} = \frac{z}{8} - 1$. L'équation devient

$$u^2 + v^2 + w^2 = 3.$$

Il est alors clair que (u, v, w) convient si et seulement si $u^2 = v^2 = w^2 = 1$, c'est-à-dire si et seulement si u ,v et w appartiennent tous trois à l'ensemble $\{-1, 1\}$. L'équation initiale avait donc pour solutions les triplets (x, y, z) tels que x, y et z appartiennent tous trois à l'ensemble $\{0, 16\}$.

Exercice 2. Sur une droite se trouvent 400 points bleus et 200 points verts. Montrer que l'on peut trouver un segment qui contient exactement 200 points bleus et 100 points verts.

Solution de l'exercice 2 Notons $A_1, \dots, A_{600}$ les points de la droite, alignés dans cet ordre. Il s'agit de montrer qu'il existe un entier $k \in \{0, \dots, 300\}$ tel que, parmi les points $A_{k+1}, \dots, A_{k+300}$, il y en a exactement 100 verts (il y en aura alors forcément 200 bleus).
Introduisons la fonction $f : \{0, \dots, 300\} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à un entier k associe le nombre de points verts parmi $A_{k+1}, \dots, A_{k+300}$. On veut montrer que f prend la valeur 100. Pour cela, remarquons deux choses :

1. Tout d'abord, la somme $f(0) + f(300)$ compte le nombre total de points verts, et elle vaut donc 200. Ainsi, l'un des deux termes de la somme est supérieur ou égal à 100 tandis que l'autre ne dépasse pas 100. Quitte à changer le sens de parcours des points sur la droite, on peut supposer que $f(0) \leqslant 100 \leqslant f(300)$.
2. Intéressons-nous maintenant à la différence $f(k) - f(k-1)$, où $k \geqslant 1$:
   - si A_{k+300} et A_k sont de même couleur, elle vaut 0 ;
   - si A_{k+300} est vert et A_k est bleu, elle vaut 1 ;
   - si A_{k+300} est bleu et A_k est vert, elle vaut -1.

En particulier, on a $f(k) - f(k-1) \leqslant 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, 300\}$.
Considérons maintenant le plus petit entier p tel que $f(p) \geqslant 100$: cet entier existe bien, puisque $f(300) \geqslant 100$. Si $p = 0$, il n'y a plus rien à faire : en effet, dans ce cas, on a $f(0) \geqslant 100$ et $f(0) \leqslant 100$,

d'où $f(0) = 100$. Si $p > 0$, la minimalité de p assure que $f(p-1) \leqslant 99$ et donc, d'après ci-dessus, on a alors $100 \leqslant f(p) \leqslant f(p-1)+1 \leqslant 100$, et ainsi $f(p) = 100$.
Finalement, dans tous les cas, la valeur 100 est bien atteinte par la fonction f, ce qui conclut.

Exercices communs

Exercice 3.
Soit $a, b, c, d > 0$ des réels tels que $abcd = 1$.
Prouver que

$$\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{c+d+2} + \frac{1}{d+a+2} \leqslant 1.$$

Solution de l'exercice 3 Il est bien connu que, si $x, y > 0$ sont des réels, on a $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$.
Par suite, $\dfrac{1}{a+b+2} \leqslant \dfrac{1}{2(\sqrt{ab}+1)}$ et $\dfrac{1}{c+d+2} \leqslant \dfrac{1}{2(\sqrt{cd}+1)}$, d'où

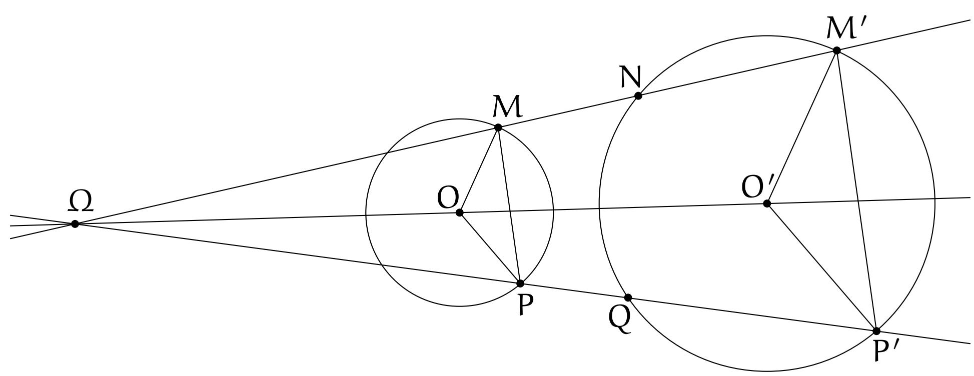
$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{c+d+2} &\leqslant \frac{1}{2(\sqrt{ab}+1)} + \frac{1}{2(\sqrt{cd}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{ab}+1)} + \frac{1}{2(\frac{1}{\sqrt{ab}}+1)} \\
&= \frac{1}{2(\sqrt{ab}+1)} + \frac{\sqrt{ab}}{2(\sqrt{ab}+1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On prouve de même que $\dfrac{1}{b+c+2} + \dfrac{1}{d+a+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

En sommant les deux inégalités précédentes, on déduit immédiatement la conclusion désirée.

Exercice 4. Soient deux cercles extérieurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O'. On mène deux rayons parallèles de même sens $[OM]$ et $[O'M']$, et deux autres rayons parallèles de même sens $[OP]$ et $[O'P']$. La droite (MM') recoupe $\mathcal{C}'$ en N et la droite (PP') recoupe $\mathcal{C}'$ en Q. Montrer que M, N, P, Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Les triangles OMP et $O'M'P'$ sont isocèles en O et O' respectivement. De plus, les angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'P'})$ sont égaux, donc ces deux triangles sont directement semblables. Comme de plus (OM) et $(O'M')$ sont parallèles, (MP) et $(M'P')$ le sont.

On en déduit $(MP, MN) = (M'P', M'N) = (QP', QN) = (QP, QN)$, donc $MNPQ$ est inscriptible.
Autre solution. Supposons que les cercles sont de rayons différents. Soit Ω le centre de l'homothétie h de rapport $\lambda > 0$ qui transforme le premier cercle en le deuxième. Le point $h(M)$ vérifie la même condition de l'énoncé que le point M', donc $h(M) = M'$. De même, $h(P) = P'$. On a $\Omega N \cdot \Omega M' = \Omega Q \cdot \Omega P'$ (puissance d'un point par rapport à un cercle), donc $\lambda \Omega N \cdot \Omega M = \lambda Q \cdot \Omega P$. En simplifiant par λ et en utilisant encore la puissance d'un point par rapport à un cercle, on en déduit que M, N, P, Q sont cocycliques.
Si les cercles sont de même rayon, alors il existe une translation qui envoie M et P sur M' et P' respectivement, donc comme ci-dessus on a $(MP, MN) = (M'P', M'N) = (QP', QN) = (QP, QN)$.

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soit $n > 0$ un entier, et a, b, c des entiers strictement positifs tels que

$$(a + bc)(b + ac) = 19^n.$$

Prouver que n est pair.

Solution de l'exercice 5 Procédons par l'absurde, et supposons qu'il existe un triplet (a, b, c) tel que $(a+bc)(b+ac) = 19^n$, où n est un entier impair. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a \geqslant b$ et que la somme $a + b + c$ est minimale.
Puisque 19 est premier, on sait que $b + ac \geqslant 2$ est une puissance de 19, donc que $b + ac \equiv 0 \pmod{19}$. Si 19 divise a, alors 19 divise b également : alors le triplet $(\alpha, \beta, c) = \left(\frac{a}{19}, \frac{b}{19}, c\right)$ est tel que $(\alpha+\beta c)(\beta+\alpha c) = 19^{n-2}$, de sorte que la somme $a+b+c$ n'est pas minimale. On sait donc que $\mathrm{PGCD}(a, 19) = 1$.
En outre, si $c = 1$, alors $(a+bc)(b+ac) = (a+b)^2$ est un carré, donc n est nécessairement pair. De même, si $a = b$, alors $(a + bc)(b + ac) = (a + ac)^2$ est un carré, et n est pair. On sait donc que $c > 1$ et que $a > b$.
Alors $b + ac = (a + bc) + (a - b)(c - 1) > a + bc$, de sorte qu'il existe deux entiers naturels u et v tels que $a + bc = 19^u$ et $b + ac = 19^{u+v}$. En particulier, $a(c - 1)(c + 1) = ac^2 - a = (b + ac)c - (a + bc) = 19^u(19^v c - 1)$. On sait donc que 19^u divise $(c - 1)(c + 1)$ et, puisque $\mathrm{PGCD}(19^u, c - 1, c + 1) = \mathrm{PGCD}(19^u, c - 1, 2) = 1$, on en déduit que 19^u divise soit $c - 1$ soit $c + 1$.
Or, on sait que $19^u = a + bc > b + bc \geqslant c + 1 > c - 1 > 0$. Il est donc impossible que 19^u divise $c - 1$ ou $c + 1$, de sorte que notre supposition initiale était fausse, et donc que n est nécessairement pair.
Remarque. Le raisonnement utilisé ci-dessus permet en fait de montrer que, si p est un nombre premier impair, les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que $(a + bc)(b + ac)$ soit une puissance de p sont les triplets de la forme $(a, p^k - a, 1)$ ou bien $(p^k, p^k, p^\ell - 1)$.
Le fait que p soit *impair* est très important, car l'exercice est faux si on prend $p = 2$, comme en témoigne l'égalité $(3 + 1 \times 5)(1 + 3 \times 5) = 2^7$.

Exercice 6. Soient n et p des entiers $\geqslant 1$. Dans une assemblée de n personnes, deux personnes quelconques ont au plus p connaissances communes ; bien sûr, si A connaît B, alors B connaît A. Montrer que le nombre de paires non ordonnées $\{A, B\}$ de personnes qui se connaissent est inférieur ou égal à $\sqrt{pn^3}$.

Solution de l'exercice 6 Notons $A_1, \cdots, A_n$ les personnes et, considérons le graphe simple et non orienté dont les sommets sont les A_i, et où deux personnes A_i et A_j sont reliées par une arête si et seulement si elles se connaissent.
Pour tout i, notons d_i le degré de A_i (c'est-à-dire le nombre de personnes que connaît A_i). Il s'agit de prouver que le nombre d'arêtes a de ce graphe vérifie $a \leqslant \sqrt{pn^3}$.
Il est bien connu que $2a = \sum_{i=1}^{n} d_i$.
Soit M le nombre de paires d'arêtes $\{XY, YZ\}$ ayant un sommet commun.
Pour tout i, le sommet A_i joue le rôle de Y autant de fois que l'on peut choisir deux sommets adjacents à A_i. Ainsi,

$$M = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}. \tag{1}$$

D'autre part, d'après l'énoncé, deux sommets quelconques ont toujours au plus p sommets adjacents communs. Ainsi,

$$M \leqslant p\binom{n}{2}. \tag{2}$$

De (1) et (2), on déduit que

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \leqslant p\binom{n}{2}. \tag{3}$$

Or, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{2}x(x-1)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc, d'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geqslant \frac{n}{2}\Big(\frac{2a}{n}\Big)\Big(\frac{2a}{n} - 1\Big) \tag{4}$$

De (3) et (4), on obtient que $2a(2a-n) \leqslant pn^2(n-1) \leqslant pn^3$, ou encore $4a^2 - 2na - pn^3 \leqslant 0$.
Si $a > \sqrt{pn^3}$, alors $0 > 4a^2 - 2na - a^2 = (3a - 2n)a \geqslant (3\sqrt{pn} - 2)na \geqslant na \geqslant 0$, ce qui conclut.