EGMO 2014, 1ère journée: corrigés

30 avril 2014

1. Déterminer tous les nombres réels t tels que si a, b, c sont les longueurs des côtés d'un triangle, alors il en est de même pour a^2+bct, b^2+cat, c^2+abt.

Proposé par S. Khan, Royaume-Uni

Solution. La solution se divise en deux parties, la première consistant à obtenir des bornes sur t, la deuxième consistant à prouver ces bornes.
Première partie : Pour avoir les bornes, il s'agit de comprendre quand les différentes inégalités triangulaires entre a^2+bct, b^2+cat, c^2+abt deviennent difficiles à réaliser. On remarque sans peine que si les longueurs des trois côtés a, b c sont trop proches, il en est de même pour a^2+bct, b^2+cat, c^2+abt, et ces derniers forment donc les côtés d'un triangle, qui ne sera pas loin d'être équilatéral. Ainsi, ce cas de figure ne donne pas de conditions sur t. Si au contraire nous avons un côté très court par rapport aux deux autres, disons $a=\epsilon<1$ et $b=c=1$, alors la condition $a^2+bct<b^2+cat+c^2+abt$ nous donne $\epsilon^2+t<2+2\epsilon t$. Comme ceci doit être vrai pour tout $\epsilon>0$, on obtient la condition $t\leq 2$.
Ce résultat nous motive pour chercher un autre cas extrême, également isocèle pour simplifier l'éventuelle condition qu'on obtient. Cette fois-ci, imaginons un triangle isocèle avec une grande base a et deux côtés égaux plus petits $b=c=1$. Bien entendu, pour que cela fasse bien un triangle, il faut choisir a un petit peu plus petit que 2, disons $a=2-\epsilon$, avec $\epsilon>0$ aussi petit qu'on veut. On obtient alors $b^2+cat+c^2+abt-a^2-bct=(3-2\epsilon)t+2-(2-\epsilon)^2$. Pour que ceci soit strictement positif pour tout $\epsilon>0$ on obtient, en faisant tendre ϵ vers zéro : $t\geq\frac{2}{3}$.

Deuxième partie Ici, il y a beaucoup de manières de faire. Nous allons présenter d'abord la solution corrigée d'une des candidates, puis les solutions officielles proposées.

Solution 1 Par symétrie, nous pouvons ordonner $0<a\leq b\leq c$. De plus, les conditions de l'énoncé étant homogènes en a,b,c, nous pouvons fixer $a=1$. La seule inégalité triangulaire non triviale à exploiter sera donc $c<1+b$. Comme nous allons le voir, le fait d'ordonner a,b,c permet de rendre deux des trois inégalités à vérifier assez claires.
Nous devons comparer $A=1+bct$, $B=b^2+ct$ et $C=c^2+bt$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
B+C-A &= b^2+c^2+(b+c)t-bct-1\\
&= (b^2-2bc+c^2)+2bc-tbc+(b+c)t-1\\
&\geq (b+c)^2+(2-t)bc+\frac{4}{3}-1\\
&> 0.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
C+A-B &= c^2+bt+1+bct-b^2-ct\\
&= (c-b)(c+b-t)+1+bct\\
&> (c-b)(2-t)\geq 0
\end{aligned}$$

(En fait, on a même $C > B$.) Moralement, comme c est le plus grand des trois réels, et que t lui-même n'est pas très grand, C est le terme dominant, et il n'est donc pas étonnant que ce soient les deux inégalités où il faut minorer C qui soient les plus faciles à démontrer. Passons à la démonstration de $C < A + B$. Pour cela, il est commode de se débarrasser des inégalités qui lient b et c en posant $c = b + \epsilon$ avec $0 \leq \epsilon < 1$. Il nous reste alors à avoir la stricte positivité de

$$Q(b) = tb^2 + \epsilon(t-2)b + (1 + \epsilon t - \epsilon^2),$$

pour $\frac{2}{3} \leq t \leq 2$ et $0 \leq \epsilon < 1$. On reconnaît un polynôme du second degré en b, dont on calcule le discriminant :

$$\Delta(t, \epsilon) = (t^2 + 4)\epsilon^2 - 4t^2\epsilon - 4t.$$

Ce dernier peut lui-même être vu comme un polynôme du second degré en ϵ. Il suffit de vérifier qu'il est strictement négatif pour $\epsilon \in [0, 1[$ quel que soit $t \in [2/3, 2]$. Puisque son coefficient dominant est strictement positif, il suffit pour cela de vérifier qu'il est strictement négatif en 0 et négatif ou nul en 1. Or $\Delta(t, 0) = -4t < 0$ si $2/3 \leq t \leq 1$, et $\Delta(t, 1) = -3t^2 - 4t + 4$. On obtient ainsi un dernier polynôme du second degré, en t, dont il faut vérifier qu'il est négatif ou nul entre les valeurs de t qui nous intéressent. Nous avons $\Delta(2/3, 1) = 0$, donc $2/3$ est racine de ce polynôme. D'autre part, il est strictement positif en 0 et son coefficient dominant est négatif, donc l'autre racine est négative, et $\Delta(t, 1)$ est strictement négatif sur $]2/3, +\infty[$. Finalement, $\Delta(t, \epsilon)$ est donc bien strictement négatif pour $\epsilon \in [0, 1[$ quel que soit $t \in [2/3, 2]$, et donc $Q(b)$ est de signe constant sur $\mathbf{R}$ pour ces valeurs d'ϵ et de t, nécessairement positif du fait de son coefficient dominant.

Solution 2 Supposons $2/3 \leq t \leq 2$ et $b + c > a$. En utilisant $(b + c)^2 \geq 4bc$ on obtient

$$\begin{aligned}
b^2 + cat + c^2 + abt - a^2 - bct &= (b + c)^2 + at(b + c) - (2 + t)bc - a^2 \\
&\geq (b + c)^2 + at(b + c) - \frac{1}{4}(2 + t)(b + c)^2 - a^2 \\
&\geq \frac{1}{4}(2 - t)(b + c)^2 + at(b + c) - a^2 .
\end{aligned}$$

Puisque $2 - t \geq 0$ et $t > 0$, cette dernière expression est croissante en $b + c$, et en utilisant $b + c > a$ on obtient

$$b^2 + cat + c^2 + abt - a^2 - bct > \frac{1}{4}(2 - t)a^2 + ta^2 - a^2 = \frac{3}{4}\left(t - \frac{2}{3}\right)a^2 \geq 0$$

puisque $t \geq 2/3$. Les deux autres inégalités s'obtiennent par symétrie.

Solution 3 On pose $x = (c + a - b)/2$, $y = (a + b - c)/2$ et $z = (b + c - a)/2$ de sorte que $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Ceci rend les expressions un peu plus compliquées à écrire, mais a l'avantage de remplacer les réels a, b, c sur lesquels nous avons des contraintes pas très faciles à utiliser par les réels x, y, z qui ne sont soumis à aucune contrainte (à part à celle d'être strictement positifs). Alors :

$$b^2 + cat + c^2 + abt - a^2 - bct = (x^2 + y^2 - z^2 + xy + xz + yz)t + 2(z^2 + xz + yz - xy) \quad (1)$$

Cette expression est une fonction affine de t, strictement positive aussi bien en $t = 2/3$ où

$$\frac{2}{3}(x^2+y^2-z^2+xy+xz+yz)+2(z^2+xz+yz-xy) = \frac{2}{3}((x-y)^2+4(x+y)z+2z^2) > 0$$

qu'en $t = 2$ où

$$2(x^2+y^2-z^2+xy+xz-yz)+2(z^2+xz+yz+xy) = 2(x^2+y^2)+4(x+y)z > 0\,.$$

Elle est donc positive sur l'intervalle $[2/3, 2]$ tout entier.
Variante Après avoir obtenu l'expression (1), on observe qu'elle peut être réécrite sous la forme

$$(2-t)z^2 + (x-y)^2t + (3t-2)xy + z(x+y)(2+t).$$

Les trois premiers termes sont positifs ou nuls et le dernier est strictement positif, ce qui conclut.

Solution 4 On distingue deux cas :

Premier cas : Si $a \geq b, c$, alors $ab+ac-bc > 0$, $2(b^2+c^2) \geq (b+c)^2 > a^2$ et $t \geq 2/3$ impliquent :

$$\begin{aligned}
b^2+cat+c^2+abt-a^2-bct &= b^2+c^2-a^2+(ab+ac-bc)t \\
&\geq (b^2+c^2-a^2)+\frac{2}{3}(ab+ac-bc) \\
&\geq \frac{1}{3}(3b^2+3c^2-3a^2+2ab+2ac-2bc) \\
&\geq \frac{1}{3}\left[(2b^2+2c^2-a^2)+(b-c)^2+2a(b+c-a)\right] \\
&> 0
\end{aligned}$$

Deuxième cas : Si $b \geq a, c$, alors $b^2+c^2-a^2 > 0$. Si on a également $ab+ac-bc \geq 0$, alors $b^2+cat+c^2+abt-a^2-bct > 0$. Si au contraire $ab+ac-bc < 0$, alors avec $t \leq 2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
b^2+cat+c^2+abt-a^2-bct &\geq b^2+c^2-a^2+2(ab+ac-bc) \\
&\geq (b-c)^2+a(b+c-a)+a(b+c) \\
&> 0
\end{aligned}$$

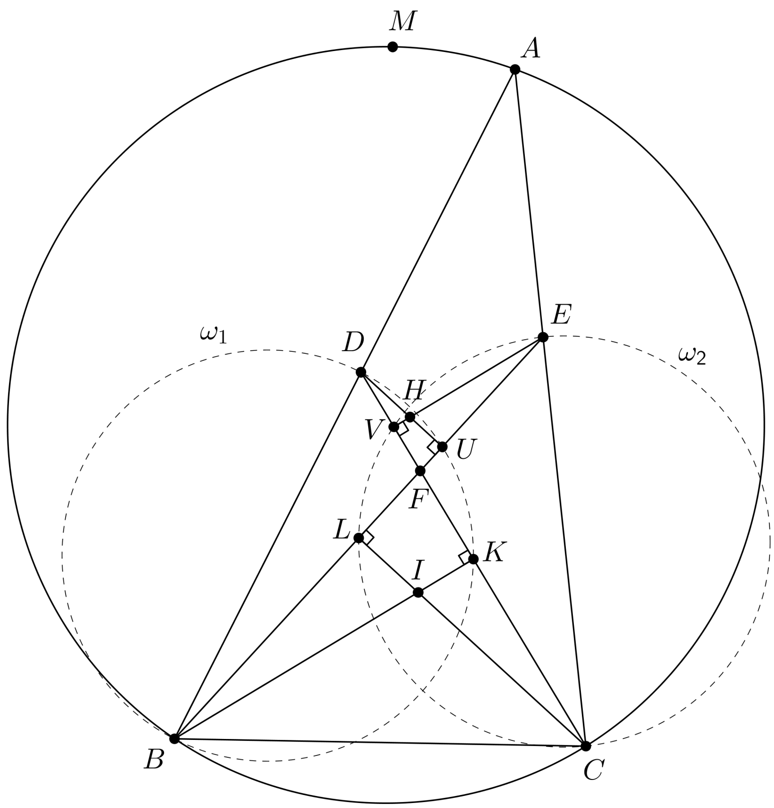
Par symétrie, nous avons fini.

2. Soient D et E des points appartenant respectivement aux intérieurs des côtés $[AB]$ et $[AC]$ d'un triangle ABC, tels que $DB = BC = CE$. Soient F le point d'intersection des droites CD et BE, I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, H l'orthocentre du triangle DEF et M le milieu de l'arc BAC du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que I, H et M sont alignés.

Proposé par Danylo Khilko, Ukraine

Solution 1.

Puisque $DB = BC = CE$, nous avons $(BI) \perp (CD)$ et $(CI) \perp (BE)$. Ainsi, I est l'orthocentre du triangle BFC. Soit K le point d'intersection des droites (BI) et (CD), et L le point d'intersection des droites (CI) et (BE). Les triangles ILB et IKC sont semblables, donc nous avons la relation $IB \cdot IK = IC \cdot IL$. Soient U et V projetés orthogonaux respectifs de D sur EF et de E sur DF. De même, les triangles DHV et EHU étant semblables, on a $DH \cdot HU = EH \cdot HV$.



Soient ω_1 et ω_2 les cercles de diamètres respectifs BD and CE. En voyant les relations ci-dessus comme des égalités entre les puissances des points I et H par rapport à ces deux cercles, nous pouvons conclure que la droite (IH) est l'axe radical des cercles ω_1 et ω_2.

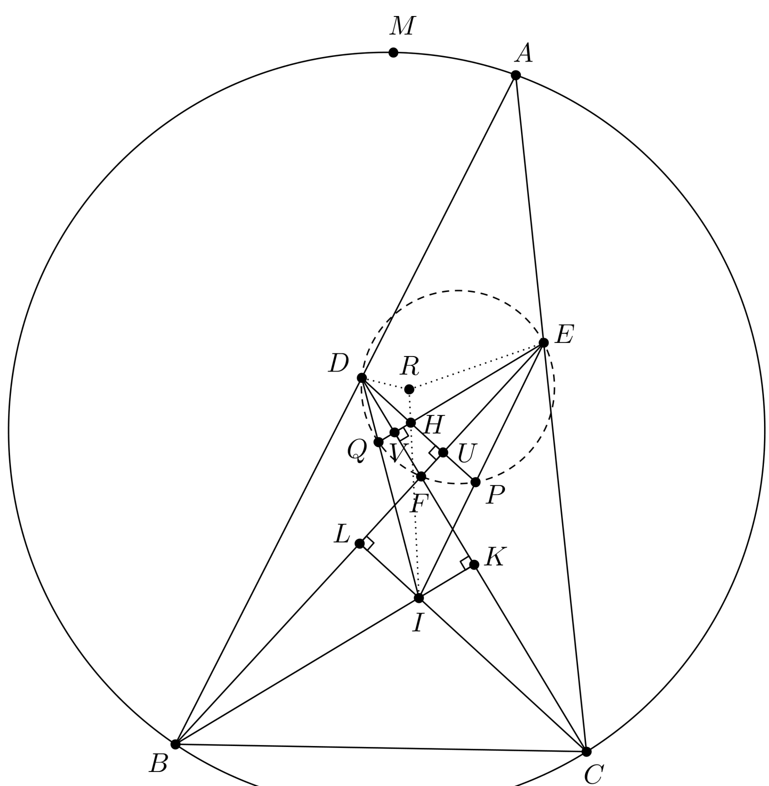
Reste à montrer que M appartient aussi à l'axe radical de ω_1 et ω_2. Puisque ces cercles ont même rayon, il suffit pour cela de prouver que M est à égale distance de leurs centres. Soient donc O_1 et O_2 les centres de ω_1 et ω_2, respectivement. Puisque M est le milieu de l'arc BAC, nous avons $MB = MC$. D'autre part, $BO_1 = CO_2$ et $\widehat{MBO_1} = \widehat{MBA} = \widehat{MCA} = \widehat{MCO_2}$, donc les triangles MBO_1 et MCO_2 sont isométriques. Nous avons donc bien $MO_1 = MO_2$, ce qui conclut.

Solution 2.

On définit les points K, L, U, V comme dans la solution 1. Soit P le point d'intersection de (DU) et (EI), et soit Q le point d'intersection de (EV) et (DI).

Puisque $DB = BC = CE$, les droites (CI) et (BI) sont perpendiculaires respectivement à (BE) and (CD). Ainsi, les droites (BI) et (EV) sont parallèles et, le triangle BIE étant isocèle en I, $\widehat{IEB} = \widehat{IBE} = \widehat{UEH}$. De même, les droites (CI) et (DU) sont parallèles et $\widehat{IDC} = \widehat{ICD} = \widehat{VDH}$. Puisque $\widehat{UEH} = \widehat{VDH}$, les points D, Q, F, P, E sont cocycliques. On tire de la l'égalité des puissances $IP \cdot IE = IQ \cdot ID$.

Soit R le deuxième point d'intersection centre du cercle circonscrit au triangle HEP et de la droite (HI). Puisque $IH \cdot IR = IP \cdot IE = IQ \cdot ID$, les points D, Q, H, R sont également cocycliques, de même que les points E, P, H, R. Nous avons $\widehat{DQH} = \widehat{EPH} = \widehat{DFE} = \widehat{BFC} = 180° - \widehat{BIC} = 90° - \widehat{BAC}/2$. En combinant ce calcul avec la cocyclicité de D, Q, H, R, et de E, P, H, R, on obtient $\widehat{DRH} = \widehat{ERH} = 180° - (90° - \widehat{BAC}/2) = 90° + \widehat{BAC}/2$. Ainsi, $\widehat{DRH} + \widehat{ERH} > 180°$, et donc R est à l'intérieur du triangle DEH. Par conséquent, $\widehat{DRE} = 360° - \widehat{DRH} - \widehat{ERH} = 180° - \widehat{BAC}$ ce qui implique que les points A, D, R, E sont cocycliques.



Puisque $MB = MC$, $BD = CE$ et $\widehat{MBD} = \widehat{MCE}$, les triangles MBD et MCE sont isométriques et $\widehat{MDA} = \widehat{MEA}$. Ainsi, les points M, D, E, A sont cocycliques. On en conclut que les points M, D, R, E, A sont cocycliques. On a alors $\widehat{MAE} = \widehat{BAC} + \widehat{MAB} = \widehat{BAC} + \widehat{MCB} = \widehat{BAC} + (90° - \angle BAC/2)$, d'où $\widehat{MRE} = 180° - \widehat{MAE} = 90° - \angle BAC/2$. On avait vu plus haut que $\widehat{ERH} = 90° + \widehat{BAC}/2$, donc les points I, H, R, M sont colinéaires.

Solution 3.

Cette solution est une solution calculatoire : il s'agit de déterminer les pentes des droites (IH) et (IM) dans un certain repère, et de montrer qu'elles sont égales. Supposons que nous avons un repère dans lequel les coordonnées des points B, C, D, E sont données respectivement par $(b_x, b_y), (c_x, c_y), (d_x, d_y), (e_x, e_y)$. Après avoir remarqué comme dans les solutions précédentes que $(BE) \perp (CI)$ et $(CD) \perp (BI)$, on a $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}$, d'où $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DE}$. De même, nous avons $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EH}$, d'où $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BE}$. On obtient donc $\overrightarrow{IH} \cdot (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC}) = 0$. On en conclut que la pente de la droite (IH) est $(c_x + e_x - b_x - d_x)/(b_y + d_y - c_y - e_y)$.

Supposons maintenant que l'axe des abscisses a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$ et coïncide avec la droite (BC), et posons $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$, $\gamma = \widehat{ACB}$. Puisque $DB = BC = CE$, nous avons $c_x - b_x = BC$, $e_x - d_x = BC - BC\cos\beta - BC\cos\gamma$, $b_y = c_y = 0$, $d_y - e_y = BC\sin\beta - BC\sin\gamma$. Ainsi, par la formule obtenue plus haut, la pente de (IH) est $(2 - \cos\beta - \cos\gamma)/(\sin\beta - \sin\gamma)$.

Montrons maintenant que la pente de (MI) est la même. Soient r et R respectivement les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC, et (m_x, m_y) et (i_x, i_y) les coordonnées de M et de I dans le repère choisi. Nous avons $\widehat{BMC} = \ BAC = \alpha$ et $BM = MC$ (ceci voulant dire que le projeté de M sur la droite (BC) est le milieu du segment $[BC]$), et donc

$$m_y - i_y = \frac{BC}{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - r.$$

D'autre part, en posant $AB = u + v$, $BC = v + w$, $CA = w + u$, on a $i_x = b_x + v = c_x - w$, donc

$$i_x = \frac{1}{2}(b_x + c_x + v - w) = m_x + \frac{AB - AC}{2},$$

d'où $m_x - i_x = \dfrac{AC - AB}{2}$. Par conséquent, la pente de la droite (MI) est $\left(\dfrac{BC}{\tan(\alpha/2)} - 2r\right)/(AC - AB)$.

La loi des sinus s'écrit

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} = 2R,$$

d'où

$$\frac{BC}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 4R\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2R(1 + \cos\alpha).$$

En utilisant l'identité

$$\frac{r}{R} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 \tag{2}$$

(voir démonstration plus bas) on obtient l'égalité des pentes

$$\frac{\frac{BC}{\tan(\alpha/2)} - 2r}{AC - AB} = \frac{2R(1 + \cos\alpha) - 2r}{2R(\sin\beta - \sin\gamma)} = \frac{2 - \cos\beta - \cos\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma}$$

qui donne la colinéarité des points I, H, M.

Démonstration de l'identité (2) : Commençons par démontrer une autre identité utile :

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \tag{3}$$

Pour cela, posons encore une fois $AB = u + v$, $BC = v + w$, $CA = w + u$. Puisque v est la distance à B du point de contact du cercle inscrit avec le segment $[BC]$, nous avons $r = v \tan \frac{\beta}{2}$, et de même, $r = w \tan \frac{\gamma}{2}$. Ainsi,

$$BC = v + w = r \left(\frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\tan \frac{\gamma}{2}} \right) = r \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} \right),$$

et donc, en utilisant le fait que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ et le fait que $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, on a

$$r = \frac{BC \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

D'autre part, nous avons $BC = 2R \sin \alpha = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, d'où le résultat.
Reste à en déduire l'identité (2). Rappelons pour cela l'identité trigonométrique $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$, qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) \\
&= 2 \sin \frac{\gamma}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \frac{\gamma}{2} \right) \\
&= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - 2 \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \\
&= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1,
\end{aligned}$$

où on a utilisé les identités $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)$ et $\cos \gamma = 1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ pour conclure.

Solution 4.

Prolongeons les bissectrices (BI) et (CI) de sorte qu'elles intersectent le cercle circonscrit à ABC respectivement en P et en Q. Appelons de plus R et S les points d'intersection respectifs de la hauteur de DEF issue de D avec (BI) et de celle issue de E avec (CI).

De même que dans les solutions précédentes, nous avons que (BI) et (CD) sont perpendiculaires. Puisque (EH) et (DF) sont également perpendiculaires, (HS) et (RI) sont parallèles. De même, (HR) et (SI) sont parallèles, et par conséquent, $HSIR$ est un parallélogramme.

D'autre part, puisque M est le milieu de l'arc BAC, nous avons

$$\widehat{MPI} = \widehat{MPB} = \widehat{MCB} = \widehat{MBC} = \widehat{MQC} = \widehat{MQI},$$

ainsi que

$$\widehat{PIQ} = \widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{PBC} - \widehat{QCB} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ + \widehat{ABC}$$

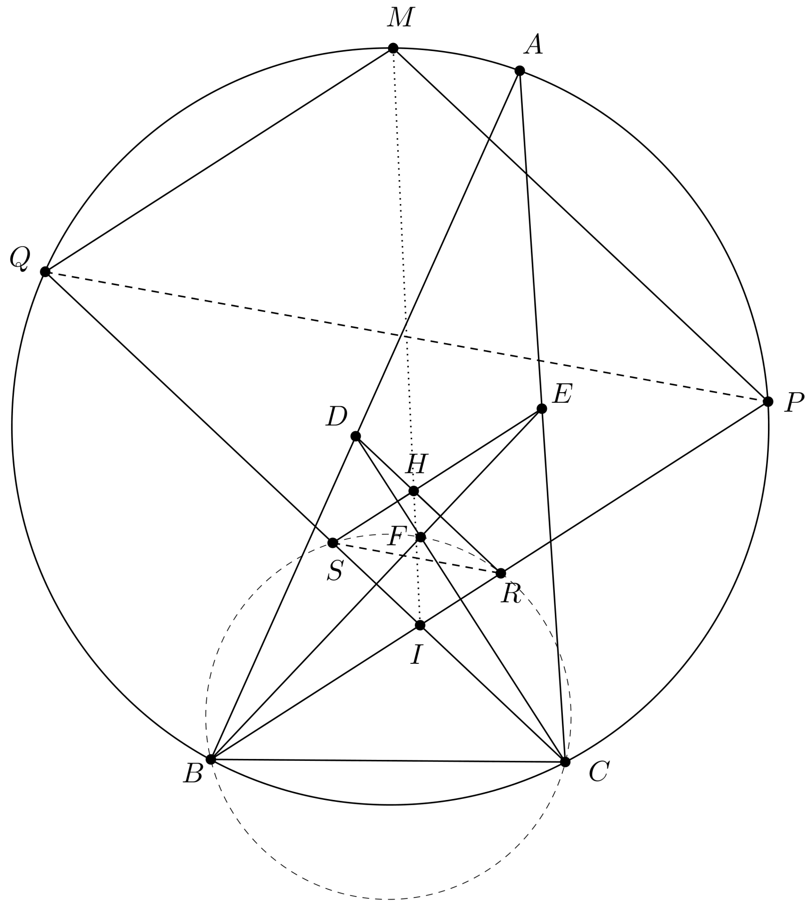
et

$$\begin{aligned}
\widehat{PMQ} &= \widehat{PMC} + \widehat{CMB} + \widehat{QPB} \\
&= \widehat{CAB} + \widehat{PBC} + \widehat{QCB} \\
&= \widehat{CAB} + \tfrac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\
&= 90^\circ + \widehat{ABC} \\
&= \widehat{PIQ}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $MPIQ$ est un parallélogramme.

Puisque CI est la médiatrice du segment $[BE]$, le triangle BSE est isocèle, d'où $\widehat{FBS} = \widehat{EBS} = \widehat{SEB} = \widehat{HEF} = \widehat{HDF} = \widehat{RDF} = \widehat{FCS}$, et donc B, S, F, C sont cocycliques. De même, B, F, R, C sont cocycliques. Il s'ensuit que B, S, R, C sont cocycliques. Puisque B, Q, P, C sont également cocycliques, (SR) et (QP) sont parallèles.

On en conclut que $HSIR$ et $MQIP$ sont des parallélogrammes homothétiques, et que par conséquent M, H, I sont colinéaires.


M
A
Q
E
P
D
H
F
S
R
I
B
C

3. Pour un entier strictement positif m, on note $d(m)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de m, et $\omega(m)$ le nombre de diviseurs premiers distincts de m. Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que $\omega(n) = k$ et tels que pour tous les entiers strictement positifs a et b vérifiant $a + b = n$, $d(n)$ ne divise pas $d\left(a^2 + b^2\right)$.

Proposé par le Japon

Solution. Rappel : Le nombre de diviseurs d'un entier $p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, où p_i sont des nombres premiers distincts, est $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

Motivation de la solution : L'énoncé du problème étant assez tarabiscoté, commençons par l'étudier pour $k = 1$ pour comprendre ce qui se passe. Il faut donc chercher n sous la forme d'une puissance d'un nombre premier, disons de 2. Il nous faut pouvoir contrôler facilement la divisibilité d'un entier par $d(n)$, il serait donc judicieux de le choisir égal à un nombre premier, donc de prendre n sous la forme 2^{p-1} où p est un nombre premier.
Il reste à vérifier que pour tous les entiers a et b tels que $a+b = n$, l'entier $d(n) = p$ ne divise pas $d(a^2+b^2)$. Si par l'absurde $p|d(a^2+b^2)$, cela veut dire que l'un des facteurs premiers de $a^2 + b^2$ a un exposant de la forme $cp - 1$, avec c un entier supérieur ou égal à 1. On peut donc écrire $a^2 + b^2 = q^{cp-1}r$ avec q un nombre premier et r un entier non divisible par q. Observant que $n^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2$, nous pouvons conclure que q ne peut être trop grand :

$$4^{p-1} = n^2 = (a + b)^2 > a^2 + b^2 = q^{cp-1}r \geq q^{cp-1} \geq q^{p-1},$$

et donc nécessairement $q < 5$.
Avant de conclure pour les cas $q = 2$ et $q = 3$, voyons si l'argument que nous avons donné ci-dessus de fonctionnerait pas pour tout k. Gardant le 2^{p-1} qui nous permet de conserver la condition de divisibilité de $d(a^2 + b^2)$ par p, on écrit $n = 2^{p-1}m$ où m est un entier impair ayant $k - 1$ facteurs premiers distincts. Nous avons ainsi toujours que p divise $a^2 + b^2$ donc que $a^2 + b^2$ est de la forme $q^{cp-1}r$ et en écrivant la même suite d'inégalités que ci-dessus, nous obtenons :

$$4^{p-1}m^2 > q^{p-1}$$

Bien entendu, nous ne pouvons conclure que $q < 5$ pour n'importe quel m. Souvenons-nous cependant que notre problème est un problème de *construction* d'une infinité de n. Nous pouvons donc imposer des conditions sur m tant qu'elles donnent lieu à une infinité d'entiers n. Ici, si on avait $q \geq 5$, on aurait $m > \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}}$. Nous pouvons donc imposer par exemple $m < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}}$, ce qui donnera bien lieu, en faisant varier p, à une infinité de n de cette forme, et implique pour chacun d'eux que $q < 5$.
Solution : A partir de maintenant, nous allons travailler directement avec $n = 2^{p-1}m$ pour voir quelles conditions, autres que $m < \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{p-1}{2}}$, on aurait éventuellement besoin d'imposer sur m ou p.
D'après ce qui précède, nous avons donc $a^2 + b^2 = q^{cp-1}r$ avec $q = 2$ ou 3. Si $q = 3$, alors, un carré étant toujours congru à 0 ou à 1 modulo 3, nous avons nécessairement que a et b sont tous les deux divisibles par 3, donc que n l'est aussi. Si $n = 2^{p-1}m$, il suffit donc simplement d'imposer de plus que m ne soit pas divisible par 3. Supposons

maintenant $q = 2$. Ce cas est différent du précédent car ici aussi bien n que a^2+b^2 ont des puissances de 2 avec des exposants dépendant de p dans leurs décompositions en facteurs premiers, et nous allons raisonner en termes de valuations p-adiques pour arriver à une contradiction En notant v_2 les valuations 2-adiques, nous avons

$$p - 1 = v_2(a + b) \geq \min\{v_2(a), v_2(b)\}$$

avec égalité si et seulement si $v_2(a) \neq v_2(b)$. Si on avait $v_2(a) \neq v_2(b)$, alors la plus petite des deux doit être égale à $p - 1$, et donc $v_2(a^2 + b^2)$ serait égale à $2p - 2$. Puisque $a^2+b^2 = 2^{cp-1}r$ avec r impair, nous aurions alors $2p-2 = cp-1$, c'est-à-dire $(2 - c)p = 1$, impossible. Donc $v_2(a) = v_2(b) < p - 1$, et, en notant t cette valeur commune, nous avons, en posant $a = 2^t a_0$ et $b = 2^t b_0$ avec a_0, b_0 impairs,

$$a_0^2 + b_0^2 = 2^{cp-1-2t}r.$$

Le côté gauche est une somme de deux carrés impairs, elle est donc congrue à 2 modulo 4, c'est-à-dire que sa valuation 2-adique est égale à 1. Nous avons donc nécessairement $cp - 1 - 2t = 1$, donc en particulier

$$cp = 2t + 2 < 2(p - 1) + 2 = 2p,$$

c'est-à-dire nécessairement $c = 1$, ce qui est impossible par cette même relation dès que p est impair.
Conclusion : Tout nombre de la forme $n = 2^{p-1}m$ où m est un entier strictement positif ayant $k - 1$ facteurs premiers distincts tous supérieurs strictement à 3 et p est un nombre premier impair tel que $(5/4)^{\frac{p-1}{2}} > m$ convient.

Remarque : Que retenir de ce problème ? Les relations $d(n) \nmid d(a^2+b^2)$ et $a+b = n$ sont assez déroutantes au premier abord, mais pour démarrer, on ne les utilise en fait que comme des sources d'inégalités de sens contraires entre n et $a^2 + b^2$: la négation de la première nous permet d'avoir l'existence d'un facteur premier q de $a^2 + b^2$ avec un exposant grand par rapport à l'exposant d'un facteur premier de n, et la seconde borne ce facteur premier q. Ce n'est qu'ensuite qu'on commence à véritablement faire de l'arithmétique en utilisant de manière cruciale les propriétés des sommes de deux carrés modulo 3 et 4.