OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

Envoi no. 6

Corrigé

Exercices du groupe B

Exercice 1. Déterminer tous les entiers a et b tels que $(a+1)(b-1) = a^2b^2$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>
Soit a, b des entiers tels que $(a+1)(b-1) = a^2b^2$.
Puisque d'une part a et $a+1$ sont premiers entre eux, et d'autre part b et $b-1$ sont premiers entre eux, c'est donc que $b-1 = \pm a^2$ et que $a+1 = \pm b^2$, où les signes sont les mêmes dans les deux relations.

• Si $b-1 = a^2$ et $a+1 = b^2$:
Alors, $a = b^2 - 1 = (b-1)(b+1) = a^2(a^2+2)$.
Si $a = 0$, on obtient $b = 1$, et on vérifie bien que $(a,b) = (0,1)$ est bien une solution du problème.
Si $a \neq 0$, après division par a, il vient donc $a(a^2+2) = 1$. Comme a et a^2+2 sont des entiers, avec $a^2 + 2 > 2$, cette dernière égalité ne peut être satisfaite.

• Si $b-1 = -a^2$ et $a+1 = -b^2$:
Alors, $-a-1 = b^2$ et $-b+1 = a^2$. Ce sont les équations obtenues au cas précédent, où (a,b) a été remplacé par $(-b,-a)$. Ainsi, la seule solution est $(a,b) = (-1,0)$.

Finalement, les solutions du problème sont $(a,b) = (0,1)$ et $(a,b) = (-1,0)$.

Exercice 2. Prouver que tout ensemble de 90 nombres choisis dans $\{1, 2, \cdots, 100\}$ en contient 10 qui forment une progression arithmétique.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
On dispose les entiers de 1 à 100 dans un tableau carré 10×10 comme suit :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

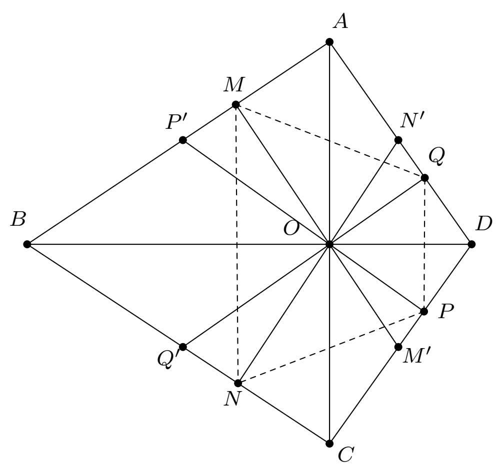
Si l'on veut éliminer 10 nombres de sorte qu'avec les 90 restants on ne puisse former de suite arithmétique de longueur 10, il faut déjà éliminer au moins un nombre dans chacune des 10 lignes, et chacune des 10 colonnes. Comme il y a justement 10 lignes, et 10 colonnes, c'est donc que l'on doit éliminer exactement un nombre par ligne et par colonne.

De plus, si pour $1 \leqslant i \leqslant 9$, le nombre éliminé dans la ligne i appartient à la colonne k, alors le nombre éliminé dans la ligne $i+1$ doit appartenir à une colonne l, avec $l < k$, sans quoi on aurait 10 entiers consécutifs parmi les 90 restants. Cela implique que l'on doit éliminer $10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82$ et 91.
Mais alors, il reste $11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83$ et 92, qui forment une suite arithmétique de raison 9, ce qui conclut.

Exercice 3. Les diagonales du quadrilatère convexe $ABCD$ sont perpendiculaires et se rencontrent en O. La perpendiculaire à (AB) passant par O rencontre (AB) en M et (CD) en M'. La perpendiculaire à (BC) passant par O rencontre (BC) en N et (DA) en N'. La perpendiculaire à (CD) passant par O rencontre (CD) en P et (AB) en P'. La perpendiculaire à (DA) passant par O rencontre (DA) en Q et (BC) en Q'.

Prouver que les points $M, N, P, Q, M', N', P', Q'$ sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3



Commençons par prouver que le quadrilatère $MNPQ$ est inscriptible :
On note que le quadrilatère $BMON$ à deux angles droits en M et en N, donc il est inscrit dans le cercle de diamètre $[OB]$. De même, les quadrilatères $CNOP, DPOQ$ et $AQOM$ sont inscrits respectivement dans les cercles de diamètres $[OC]$, $[OD]$ et $[OA]$. On en déduit que $\widehat{OMN} = \widehat{OBN}$, que $\widehat{OMQ} = \widehat{OAQ}$, que $\widehat{OPQ} = \widehat{ODQ}$ et que $\widehat{OPN} = \widehat{OCN}$.

Il vient alors

$$\begin{aligned}\widehat{QMN} &= \widehat{QMO} + \widehat{OMN}\\ &= \widehat{QAO} + \widehat{OBN}\\ &= \widehat{DAC} + \widehat{DBC}.\end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned}\widehat{QPN} &= \widehat{QPO} + \widehat{OPN}\\ &= \widehat{QDO} + \widehat{OCN}\\ &= \widehat{ADB} + \widehat{ACB}.\end{aligned}$$

Or, puisque $[AC]$ et $[DB]$ sont perpendiculaires, on a $\widehat{DAC} + \widehat{ADB} = 90°$, et de même $\widehat{DBC} + \widehat{ACB} = 90°$. Ainsi $\widehat{QMN} = 180° - \widehat{QPN}$. Cela assure que $MNPQ$ est inscriptible.

On note Γ le cercle circonscrit à $MNPQ$. Par symétrie des rôles, pour conclure, il suffit de prouver que Q' est sur Γ.
Supposons que $N \in [CQ']$, les autres cas se traitant de façons similaires.
Nous avons $\widehat{NQ'Q} = \widehat{NQ'O} = 180° - \widehat{Q'CO} - \widehat{COQ'}$.
Mais $\widehat{Q'CO} = \widehat{NCO} = \widehat{NPO}$, puisque $NCPO$ inscriptible.

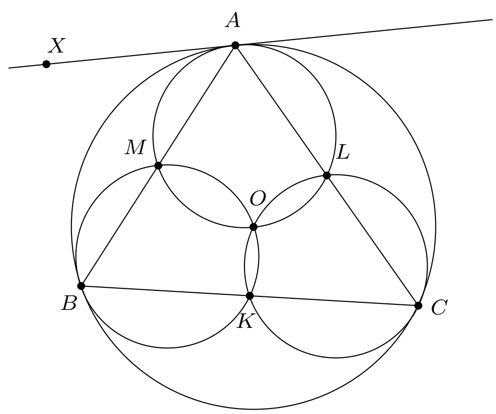
D'autre part, comme les côtés sont perpendiculaires deux à deux, on a $\widehat{COQ'} = \widehat{ODQ} = \widehat{OPQ}$, la dernière égalité découlant du fait que $OPDQ$ est inscriptible.
Ainsi, on a $\widehat{NQ'Q} = 180° - \widehat{NPO} - \widehat{OPQ} = 180° - \widehat{NPQ}$, ce qui assure que Q' appartient bien au cercle circonscrit à NPQ.

Exercices communs

Exercice 4. A l'intérieur du cercle Γ se trouvent trois cercles γ_1, γ_2 et γ_3, et tangents à Γ respectivement en A, B et C, tous distincts. Les cercles γ_2 et γ_3 ont un point commun K qui appartient à $[BC]$, les cercles γ_3 et γ_1 ont un point commun L qui appartient à $[CA]$, et les cercles γ_1 et γ_2 ont un point commun M qui appartient à $[AB]$.

Prouver que le centre de Γ appartient à γ_1, γ_2 et γ_3.

Solution de l'exercice 4



Soit X un point de la tangente commune à Γ et γ_1, et situé du côté opposé à C par rapport à la droite (AB). Alors $\widehat{ALM} = \widehat{XAM} = \widehat{XAB} = \widehat{ACB}$, ce qui assure que (ML) et (BC) sont parallèles. De même, on a (KM) et (AC) parallèles, ainsi que (KL) et (AB) parallèles.

Posons $x = \frac{AM}{AB}$. D'après le théorème de Thalès, on a alors :

$$\frac{BK}{BC} = \frac{BM}{BA} = 1 - x \text{ et } \frac{CL}{CA} = \frac{CK}{CB} = 1 - (1 - x) = x.$$

Ainsi $x = \frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC} = 1 - x$, d'où $x = \frac{1}{2}$.

Les points M, K, L sont donc les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CA]$, et les triangles AML, MBK, LKC sont tous semblables à ABC dans un rapport $\frac{1}{2}$. Si on note r_1, r_2, r_3 et R les rayons respectifs des cercles $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et Γ, on en déduit que $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{2}R$.
D'autre part, puisque γ_1 et Γ sont tangents en A les diamètres issus de A dans γ_1 et Γ sont portés par la même droite. Ainsi, le centre de Γ appartient à γ_1, et on prouve de même qu'il appartient également à γ_2 et γ_3.

Remarque : une autre manière d'exprimer le paragraphe précédent consiste utiliser l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Comme $h(A) = A$, $h(B) = M$ et $h(C) = L$, l'image par h de Γ est le cercle circonscrit à ALM, c'est-à-dire γ_1. Soit A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle Γ et soit O le centre de Γ. Comme $h(A') = O$, le point O appartient à γ_1, et de même il appartient à γ_2 et γ_3.

Exercice 5. Soit $n, m \geqslant 1$ des entiers, avec m impair.
Prouver que $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 5
Par l'absurde : supposons qu'il existe un nombre premier p qui divise à la fois $2^m - 1$ et $2^n + 1$.

Alors, on a $2^m \equiv 1 \bmod [p]$ et $2^n \equiv -1 \bmod [p]$,
d'où $2^{2n} \equiv 1 \bmod [p]$.
Soit ω l'ordre de 2 modulo p. On sait qu'alors ω divise m et $2n$. Mais, comme m est impair, ω est donc impair, ce qui assure qu'en fait ω divise n.
On a alors $2^n \equiv 1 \bmod [p]$, et toujours $2^n \equiv -1 \bmod [p]$.
Par suite, p divise 2, et donc $p = 2$.
Mais, on a $m \geqslant 1$, d'où $2^m - 1$ est impair et n'est donc pas divisible par 2. Contradiction.

Finalement, $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

Autre solution
Montrons d'abord par récurrence sur $a+b$ que le pgcd de $2^a - 1$ et $2^b - 1$ est $2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1$. Si $a = 0$ ou $b = 0$ c'est clair. Supposons la propriété vraie pour tous les couples (a', b') tels que $a'+b' < a+b$. On peut supposer $a \geqslant b > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\text{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) &= \text{pgcd}(2^b - 1, 2^a - 1 - (2^b - 1)) \\
&= \text{pgcd}(2^b - 1, 2^b(2^{a-b} - 1)) \\
&= \text{pgcd}(2^b - 1, 2^{a-b} - 1) \quad \text{car } 2^b - 1 \text{ et } 2^b \text{ premiers entre eux} \\
&= 2^{\text{pgcd}(b,a-b)} - 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 2^{\text{pgcd}(a,b)} - 1,
\end{aligned}$$

ce qui démontre notre assertion.

Revenons à l'exercice. Notons $d' = \text{pgcd}(2^m - 1, 2^n + 1)$. Soit $d = \text{pgcd}(m, n)$, alors ce qui précède montre que $2^d - 1 = \text{pgcd}(2^m - 1, 2^{2n} - 1)$. Or, $2^{2n} - 1$ est un multiple de $2^n + 1$, donc d' divise $2^d - 1$. Comme $2^d - 1$ divise $2^n - 1$, d' divise aussi $(2^n + 1) - (2^n - 1) = 2$. Or, $2^m - 1$ est impair donc d' est impair. Il vient $d' = 1$.

Exercice 6. On désigne par K la valeur maximale de

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 - x_3| \cdot |x_1 - x_4| \cdot |x_2 - x_3| \cdot |x_2 - x_4| \cdot |x_3 - x_4|$$

où $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0; 1]$.

a) Prouver que $\frac{4}{243} < K < \frac{1}{27}$.

b) Déterminer K.

Solution de l'exercice 6
a) Soit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0; 1]$.
On pose

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = |x_1-x_2|\cdot|x_1-x_3|\cdot|x_1-x_4|\cdot|x_2-x_3|\cdot|x_2-x_4|\cdot|x_3-x_4|.$$

Si deux des nombres x_1,x_2,x_3,x_4 sont égaux, on a $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$, qui n'est clairement pas la valeur maximale de f. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $x_1>x_2>x_3>x_4$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\sqrt[3]{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)} \leqslant \frac{(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+(x_3-x_4)}{3} = \frac{x_1-x_4}{3} \leqslant \frac{1}{3}$$

et donc $|x_1-x_2|\cdot|x_2-x_3|\cdot|x_3-x_4| \leqslant \frac{1}{27}$.
D'autre part, on a $|x_1-x_3|<1, |x_1-x_4|\leqslant 1$ et $|x_2-x_4|<1$,
d'où $f(x_1,x_2,x_3,x_4)<\frac{1}{27}$.
Et ainsi, on a $K<\frac{1}{27}$.

D'autre part, on vérifie facilement que $f(1,\frac{3}{4},\frac{1}{4},0)=\frac{9}{512}>\frac{4}{243}$, d'où $K>\frac{4}{243}$.

b) Sans perte de généralité, on suppose toujours que $x_1>x_2>x_3>x_4$. Mais, il est facile de constater que $f(x_1,x_2,x_3,x_4)\leqslant f(1,x_2,x_3,0)$. Ainsi, en posant $x_2=y$ et $x_3=z$, on cherche la valeur maximale de

$$g(x,y)=(1-y)(1-z)(y-z)yz,$$

sous la contrainte $0<z<y<1$.

Soit s un réel.
On rappelle que si a,b sont deux réels tels que $a+b=s$ alors $ab=\frac{1}{4}s^2-(a-\frac{s}{2})^2\leqslant\frac{1}{4}s^2$, avec égalité si et seulement si $a=b=\frac{1}{2}s$.

Soit alors $t\in]0,1[$, et considérons les couples (y,z) pour lesquels $y-z=t$.
Dans ces conditions, les valeurs $(1-y)+z=1-t$ et $(1-z)+y=1+t$ sont fixées. D'après le rappel, le produit $(1-y)z$ est donc maximal pour $y+z=1$, et il en est de même pour le produit $(1-z)y$. Compte-tenu de $y-z=t$, cela correspond à $y=\frac{1+t}{2}$ et $z=\frac{1-t}{2}$ et, dans ces conditions, on a $g(y,z)=\frac{1}{16}t(1-t^2)^2$.

Il s'agit donc de chercher la valeur maximale de $P(t)=\frac{1}{16}t(1-t^2)^2$, lorsque $t\in]0,1[$.
Il est facile de vérifier que, pour tout $t\in]0,1[$, on a $P'(t)=\frac{1}{16}(1-t^2)(1-5t^2)$. Cela assure que la valeur maximale cherchée est $P(\frac{1}{\sqrt{5}})=\frac{\sqrt{5}}{125}$.

Ainsi, on a $K=\frac{\sqrt{5}}{125}$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Si $n>0$ est un entier, on désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de n.

a) Existe-t-il une suite $(a_i)_{i\geqslant 1}$ strictement croissante d'entiers strictement positifs tels que, pour tout i suffisamment grand, le nombre a_i soit divisible par exactement $d(i)-1$ termes de la suite (y compris lui-même) ?

b) Existe-t-il une suite $(a_i)_{i\geqslant 1}$ strictement croissante d'entiers strictement positifs tels que, pour tout i suffisamment grand, le nombre a_i soit divisible par exactement $d(i)+1$ termes de la suite (y compris lui-même) ?

Solution de l'exercice 7
a) La réponse est oui.
Il suffit de trouver une suite (a_i) qui vérifie les deux conditions suivantes :
- le nombre a_1 ne divise aucun autre terme de la suite,
- le nombre i divise j si et seulement si a_i divise a_j, pour tous $i, j \geqslant 2$.

Or, il est bien connu que, pour tous entiers $i, j \geqslant 1$, on a $\text{pgcd}(2^i-1, 2^j-1) = 2^d-1$, où $d = \text{pgcd}(i, j)$. Par conséquent, la suite définie par $a_1 = 2$ et $a_i = 2^i - 1$ pour $i > 1$ convient.

b) La réponse est également oui.
En fait, de façon plus générale, on va prouver que si $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est une fonction et qu'il existe un entier $N > 0$ tel que $f(n) \leqslant n$ pour tout $n \geqslant N$, alors il existe une suite strictement croissante $(a_i)_{i\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs telle que, pour tout i suffisamment grand, le nombre a_i est divisible par exactement $f(i)$ termes de la suite.
Notons tout de suite que cela répond à la fois au a) et au b) puisque $d(n) < n$ pour tout $n \geqslant 3$ (le nombre $n-1$ ne divise pas n pour $n \geqslant 3$).

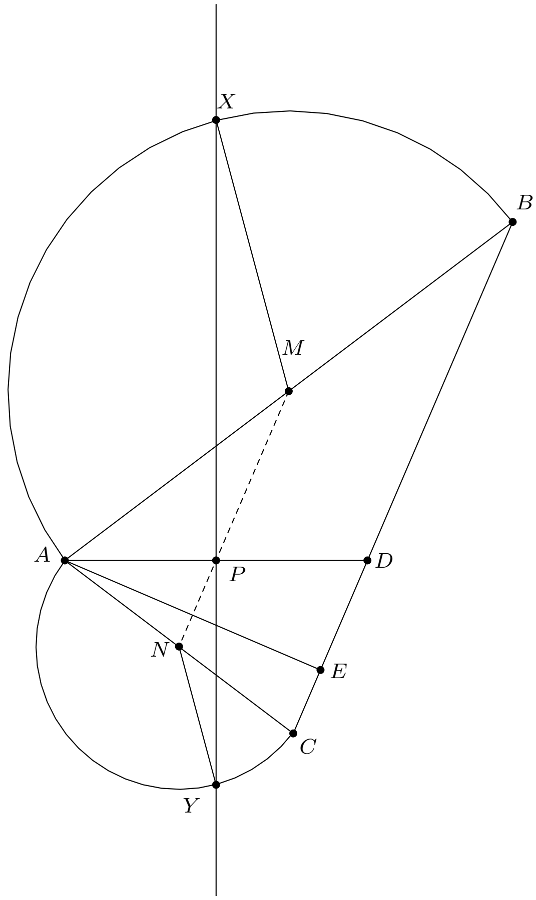
Dans les conditions ci-dessus donc, on commence par choisir une suite strictement croissante $a_1, a_2, \cdots, a_M$ de M nombres premiers. Puis, par récurrence sur $k > M$, si $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ sont définis avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1}$, on choisit un nombre premier p_k tel que $p_k > a_{k-1}$ et on pose $a_k = a_1 a_2 \cdots a_{f(k)-1} p_k$.

On a alors clairement $a_{k-1} < a_k$.
De plus, pour tout $i > M$, le nombre a_i est divisible que par $a_1, a_2, \cdots, a_{f(i)-1}$ et par lui-même. Par contre, a_i n'est divisible par aucun autre terme a_j, avec $j > f(i)-1$ et $j \neq i$, puisqu'un tel a_j contient un facteur premier p_j qui ne divise aucun des a_k avec $k \leqslant f(i)-1$ et tel que $p_j \neq p_i$.

Exercice 8. Soit ABC un triangle. On désigne par D le pied de la bissectrice de $\widehat{BAC}$, et par E le pied de la hauteur issue de A. La médiatrice de $[AD]$ rencontre les demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$ construits extérieurement à ABC, en X et Y.

Prouver que les points X, Y, D, E sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8



On désigne par M, N et P les milieux respectifs de $[AB], [AC]$ et $[AD]$. D'après le théorème des milieux, on a N, P, M alignés et, compte-tenu de ce que $(AP) = (AD)$ est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, on a

$$\frac{MP}{NP} = \frac{BD}{CD} = \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} = \frac{MX}{NY}.$$

En particulier, il vient $\frac{MP}{MX} = \frac{NP}{NY}$. En utilisant la loi des sinus dans MPX et NPY, et puisque $\widehat{NPY} = \widehat{MPX}$, c'est donc que $\sin \widehat{PXM} = \sin \widehat{PYN}$. (1)
Or, on a clairement $\widehat{PXM} < \widehat{BXA} = 90°$ et $\widehat{PYN} < \widehat{AYC} = 90°$, donc (1) donne $\widehat{PXM} = \widehat{PYN}$.
Comme $\widehat{MPX} = \widehat{NPY}$, c'est donc que les triangles PXM et PYN sont semblables, et que $\widehat{PMX} = \widehat{PNY}$. (2)

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'entre M et N, c'est N qui est du même côté que A par rapport à (XY).
Ainsi (2) conduit à $\widehat{PMA} + \widehat{AMX} = \widehat{PNC} + \widehat{CNY}$,
d'où $\widehat{CBA} + 2\widehat{ABX} = 180° - \widehat{BCA} + 180° - 2\widehat{ACY}$
et donc

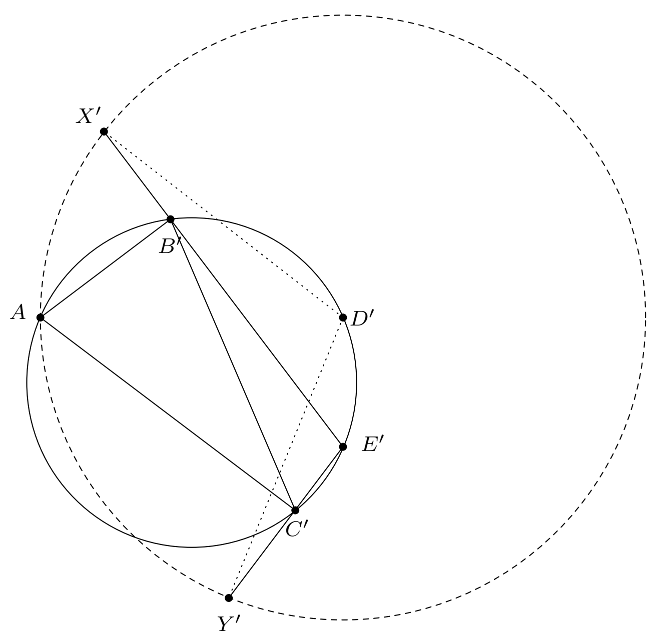
$$\begin{aligned}\widehat{ABX} + \widehat{ACY} &= 180° - \widehat{ABC} - \widehat{BCA} + 90° - \widehat{ABX} + 90° - \widehat{ACY} \\ &= \widehat{BAC} + \widehat{XAB} + \widehat{CAY} \\ &= \widehat{XAY}. \ (3)\end{aligned}$$

Mais, $\widehat{AEB} = \widehat{AEC} = 90°$ donc E appartient aux cercles de diamètres $[AB]$ et $[AC]$, soit donc aux cercles circonscrits aux triangles ABX et ACY. Par suite, on a $\widehat{ABX} = \widehat{AEX}$ et $\widehat{ACY} = \widehat{AEY}$. (4)
De (3) et (4), on déduit que

$$\widehat{XEY} = \widehat{XEA} + \widehat{AEY} = \widehat{ABX} + \widehat{ACY} = \widehat{XAY}.$$

D'autre part, puisque (XY) est la médiatrice de $[AD]$, on a $\widehat{XAY} = \widehat{XDY}$, et finalement $\widehat{XEY} = \widehat{XDY}$, ce qui conclut.

Autre solution. On applique une inversion i de pôle A. Rappelons que les cercles ne passant pas par A sont transformés en des cercles ne passant pas par A, que les droites passant par A sont conservées et que les cercles passant par A sont transformés en des droites perpendiculaires à la droite reliant A et le centre du cercle. D'autre part, toute inversion conserve les angles entre deux droites ou cercles sécants.
On en déduit que i transforme le cercle de diamètre $[AB]$ en la perpendiculaire à (AB') passant par B', transforme la droite (BC) en le cercle $(AB'C')$ de sorte que D' est le milieu de l'arc $B'C'$ ne contenant pas A et E' est le point diamétralement opposé à A. De plus, i envoie la médiatrice de $[AD]$ sur le cercle de centre D' passant par A. Enfin, comme E sur le cercle de diamètre $[AB]$, les points E', B, X' sont alignés et de même E', C, Y' sont alignés.
Supposons que les angles en B et en C du triangle ABC sont aigus (le raisonnement est analogue dans le cas contraire). Alors E' appartient à l'arc $B'C'$ ne contenant pas A. Quitte à échanger les rôles de B et de C, on peut supposer que E' appartient à l'arc $C'D'$ comme sur la figure.



Le fait que E ne se trouve pas sur le même demi-cercle de diamètre $[AB]$ que X implique que B' se trouve entre E' et X'. De même, C' se trouve entre E' et Y'.

Remarquons d'abord que $\widehat{Y'E'D'}$ et $\widehat{X'E'D'}$ sont supplémentaires puisque $\widehat{Y'E'D'} = \widehat{C'E'D'} = \pi - \widehat{C'AD'} = \pi - \widehat{D'AB'} = \pi - \widehat{D'E'B'} = \pi - \widehat{D'E'X'}$.

Appliquons maintenant le théorème de Ceva trigonométrique pour le point D' appartenant au triangle $EX'Y'$.

$$\frac{\sin(\overrightarrow{E'D'},\overrightarrow{E'X'})}{\sin(\overrightarrow{E'D'},\overrightarrow{E'Y'})}\times\frac{\sin(\overrightarrow{X'D'},\overrightarrow{X'Y'})}{\sin(\overrightarrow{X'D'},\overrightarrow{X'E'})}\times\frac{\sin(\overrightarrow{Y'D'},\overrightarrow{Y'E'})}{\sin(\overrightarrow{Y'D'},\overrightarrow{Y'X'})}=-1. \tag{1}$$

Comme $(\overrightarrow{E'D'},\overrightarrow{E'X'})=(\overrightarrow{E'D'},\overrightarrow{E'B'})=(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AB'})$ et $(\overrightarrow{E'D'},\overrightarrow{E'Y'})=(\overrightarrow{E'D'},\overrightarrow{E'C'})=(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{AC'})+\pi$, la première fraction est égale à 1.
De plus, comme $D'X'Y'$ est isocèle en D', on a $(\overrightarrow{X'D'},\overrightarrow{X'Y'})=-(\overrightarrow{Y'D'},\overrightarrow{Y'X'})$. En reportant dans (1), on en conclut que

$$\sin(\overrightarrow{X'D'},\overrightarrow{X'E'})=\sin(\overrightarrow{Y'D'},\overrightarrow{Y'E'}), \tag{2}$$

ce qui prouve que les angles $\widehat{D'X'E'}$ et $\widehat{D'Y'E'}$ sont égaux ou supplémentaires.
S'ils étaient supplémentaires, on aurait $\widehat{X'E'D'}+\widehat{D'X'E'}+\widehat{Y'E'D'}+\widehat{D'Y'E'}=2\pi$, donc la somme des angles des triangles $D'X'E'$ et $D'Y'E'$ dépasserait 2π, ce qui est impossible. Par conséquent, $\widehat{D'X'E'}$ et $\widehat{D'Y'E'}$ sont égaux. D'après (2), ceci montre que $(\overrightarrow{X'D'},\overrightarrow{X'E'})=(\overrightarrow{Y'D'},\overrightarrow{Y'E'})$, d'où la cocyclicité de D',E',X',Y'.

Exercice 9. On considère une rangée de cases numérotées $0,1,...,k$ de gauche à droite où, pour chaque $i\geqslant 1$, la case numéro i contient x_i jetons. Il n'y a initialement aucun jeton sur la case numéro 0. A tour de rôle, Alice et Bob jouent alors selon les règles suivantes :
- Bob choisit un ensemble S de jetons, pas forcément tous sur la même case.
- Alice peut ensuite soit éliminer tous les jetons qui ne sont pas dans S mais alors déplacer chaque jeton de S de la case qu'il occupe à la case voisine à sa gauche (un tel jeton passe donc d'une case numéro i à la case numéro $i-1$, soit éliminer tous les jetons qui sont dans S mais alors déplacer chaque jeton qui n'est pas dans S de la case qu'il occupe à la case voisine à sa gauche.
Bob gagne la partie s'il arrive à amener un jeton sur la case numéro 0, et Alice gagne si elle arrive à éliminer tous les jetons.

1) Prouver qu'Alice possède une stratégie gagnante si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}2^{-i}x_i<1$.

2) Est-il vrai que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}2^{-i}x_i\geqslant 1$ alors Bob possède une stratégie gagnante ?

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>
Dans tout ce qui suit, on peut clairement supposer que Bob ne choisit jamais $S=\emptyset$ ou S l'ensemble de tous les jetons non encore éliminés, sans quoi Alice gagne immédiatement. Du coup, le nombre de jetons diminue strictement après chaque fois qu'Alice joue, ce qui assure que le jeu se termine toujours en un nombre fini de tours, soit par élimination de tous les jetons, soit parce que l'un d'eux aura atteint la case numéro 0. Ainsi, il n'y aura pas de partie nulle.
De plus, s'agissant d'un jeu à information parfaite, il est bien connu que l'un des deux joueurs a alors une stratégie gagnante. Reste à savoir lequel...

1) • <u>Approche probabiliste :</u> Fixons une stratégie pour Bob. Alice va alors jouer de façon aléatoire. Plus précisément, à chaque tour, après que Bob ait choisi son ensemble S de jetons, Alice lance une pièce équilibrée. Si elle obtient Face, elle élimine les jetons de S (et déplace donc ceux qui ne sont pas dans S vers la gauche) et, si elle obtient Pile, elle fait le contraire.

Pour chaque jeton j, on note X_j la variable aléatoire égale à 1 si le jeton j est sur la case numéro 0 à la fin de la partie, et égale à 0 sinon.
Soit enfin $X = \sum_j X_j$, la somme portant sur l'ensemble des jetons de départ.
On remarque que X représente le nombre total de jetons qui arrivent sur la case numéro 0 à la fin du jeu, et donc qu'Alice gagne si et seulement si $X < 1$.

Soit j un des jetons de départ. A chaque tour, Bob peut choisir S de sorte que, si j n'a pas encore été éliminé, on ait $j \in S$ ou $j \notin S$ mais, quoi qu'il en soit, la probabilité que j soit alors déplacé vers la gauche est égale à $\frac{1}{2}$. Si, au début du jeu, le jeton j se trouve sur la case numéro i, il arrive sur la case numéro 0 à la fin du jeu si et seulement si les i premiers lancers de pièces ont tous conduit à des déplacements vers la gauche, ce qui arrive donc avec une probabilité $\frac{1}{2^i}$. Par suite, on a $E(X_j) = \frac{1}{2^i}$ pour tout jeton j.
Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(X) = \sum_j E(X_j) = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i < 1.$$

Cela assure que l'événement $[X < 1]$ se réalise avec une probabilité non nulle. Ainsi, quelle que soit la stratégie de Bob, Alice a une probabilité non nulle de gagner, ce qui prouve que Bob n'a pas de stratégie gagnante. D'après notre remarque initiale, c'est donc Alice qui en possède une.

• Approche déterministe : Plaçons nous à un instant donné au cours de la partie, juste avant que ce soit à Bob de jouer, et considérons la configuration C obtenue. Pour chaque i, on note y_i le nombre de jetons qui sont alors sur la case numéro i, et on définit *le poids de* C par $W(C) = \sum_{i=1}^{k} y_i 2^{-i}$.

Pour faire le lien avec l'approche probabiliste, on peut noter que $W(C) = E(Y)$, où Y est le nombre de jetons qui vont arriver sur la case numéro 0 si Alice joue le reste de la partie, depuis la configuration C, de la façon aléatoire ci-dessus.

La stratégie d'Alice va consister alors à toujours choisir des configurations afin de minimiser les poids W successifs :
Soit donc C une configuration pour laquelle le jeu ne soit pas déjà terminé, de poids $W = W(C)$, et supposons que Bob choisisse l'ensemble S de jetons.
On note W^+ (resp. W^-) le poids de la configuration obtenue si Alice déplace les jetons de S vers la gauche (resp. élimine les jetons de S).
Pour chaque jeton j, la contribution de j est nulle (j a été éliminé) dans l'une des sommes W^+ et W^-, et vaut le double de ce qu'elle est dans W pour l'autre. Ceci étant vrai pour chaque jeton, on a donc $W = \frac{1}{2}(W^+ + W^-)$.
En particulier, Alice peut alors choisir une configuration C' pour laquelle $W(C') \leqslant W(C)$. Or, puisqu'on débute le jeu avec une configuration de poids strictement inférieur à 1, cela assure que, tout au long du jeu, Alice peut imposer des configurations de poids strictement inférieurs à 1. Ceci empêche clairement Bob de gagner puisqu'un jeton sur la case numéro 0 donne, à lui seul, un poids égal à 1.

2) Supposons que $\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i \geqslant 1$.

On va prouver que Bob possède une stratégie gagnante. Compte-tenu de notre remarque préliminaire, il suffit de prouver qu'Alice n'a pas de stratégie gagnante.

Soit C une configuration pour laquelle le jeu n'est pas encore terminé. On note J l'ensemble des jetons de C.
Si $A \subset J$, on note C_A la configuration obtenue à partir de C en ne gardant que les jetons qui sont dans A (sans les déplacer vers la gauche).

<u>Lemme.</u> Si C est une configuration telle que $W(C) \geqslant 1$, il existe une partie S de J telle que

$$W(C_S) \geqslant \tfrac{1}{2} \text{ et } W(C_{\overline{S}}) \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Preuve du lemme.
Tout d'abord, on remarque que si une configuration C vérifie $W(C) \geqslant 1$ alors il existe i tel que $y_i \geqslant 2$. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$W(C) \leqslant \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} = 1 - \frac{1}{2^k} < 1.$$

On raisonne par récurrence sur le nombre n de jetons de la configuration :
- Si la configuration considérée ne possède que deux jetons alors, d'après ci-dessus, ils sont tous les deux sur la même case. De plus, si l'on veut que $W(C) \geqslant 1$, il est facile de vérifier qu'ils sont en fait sur la case numéro 1. Ainsi, la partie S formée par l'un des deux jetons convient.

- Soit $n \geqslant 3$ et supposons la conclusion assurée pour toute configuration de poids supérieur ou égal à 1, et contenant $n-1$ jetons. Soit alors C une configuration telle que $W(C) \geqslant 1$ et à n jetons.
Si $y_1 \geqslant 2$, une partie S formée uniquement d'un des jetons qui sont sur la case numéro 1 convient.
Sinon, soit $i \geqslant 2$ tel que $y_i \geqslant 2$ et soit A et B deux jetons qui sont sur la case numéro i. On considère alors la configuration C' identique à C sauf pour A et B qui sont remplacés par un seul jeton X, placé sur la case numéro $i-1$. On a clairement $W(C') = W(C) \geqslant 1$, et C' ne contient que $n-1$ jetons. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe donc une partie S' de l'ensemble des jetons de C' telle que $W(C'_{S'}) \geqslant \frac{1}{2}$ et $W(C'_{\overline{S'}}) \geqslant \frac{1}{2}$.
Il est alors facile de vérifier que si S est la partie formée des jetons de S', et en remplaçant X par A et B, on a bien $W(C_S) \geqslant \frac{1}{2}$ et $W(C_{\overline{S}}) \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui achève la récurrence et la preuve.

Revenons au jeu. Une fois que Bob a choisi un ensemble S de jetons, quel que soit le choix d'Alice, celui-ci conduira à une configuration dont le poids sera le double de celui de la configuration formée uniquement par les jetons qui ne seront pas éliminés. Le lemme assure donc qu'à partir d'une configuration de poids supérieur ou égal à 1, Bob peut choisir S de sorte qu'après le choix d'Alice, on obtienne une configuration de poids supérieur ou égal à 1. Puisque la configuration initiale est supposée de poids supérieur ou égal à 1, Bob peut donc imposer que toute la partie se déroule sur de telles configurations. Cela empêche clairement Alice de gagner (elle cherche à obtenir une configuration de poids nul), d'où la conclusion.