OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

Envoi no. 5

Pour le 15 mars 2014

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. À l'intérieur du carré, on trace les arcs de cercles de centres A, B, C, D et de rayon 1. Déterminer l'aire de chaque portion délimitée à l'intérieur du carré.

Exercice 2. Dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, on trace une corde $[CD]$. Soit Γ le cercle de diamètre $[CD]$ et O' son centre. La médiatrice de $[CD]$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B tels que A est extérieur à Γ. Notons T et T' les points de contact des tangentes à Γ passant par A. Soit F le milieu de $[TT']$. Montrer que O' est le milieu de $[BF]$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soient M et N deux points de $[BC]$. Les droites $[AM]$ et $[AN]$ recoupent le cercle circonscrit à ABC en P et Q.
1) Montrer que M, N, P, Q sont cocycliques.
2) Soient R_1 et R_2 les rayons des cercles circonscrits à BMP et CMP. Calculer $R_1 + R_2$ en fonction des longueurs AB et BC.

Exercices communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle. Les bissectrices de $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ recoupent le cercle circonscrit en A', B' et C' respectivement. Soit I le centre du cercle inscrit à ABC. Les cercles de diamètres $[IA'], [IB']$ et $[IC']$ coupent respectivement les droites $(BC), (CA)$ et (AB) en A_1 et A_2, B_2 et B_2, C_1 et C_2. Montrer que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Un cercle passant par A et B coupe $[AC]$ et $[BD]$ en E et F. Les droites (AF) et (BE) coupent $[BC]$ et $[AD]$ en P et Q respectivement. Montrer que (PQ) est parallèle à (CD).

Exercice 6. Soit A un point extérieur à un cercle Γ. On mène deux tangentes $[AT]$ et $[AT']$ issues de A. Soient M et M' les milieux de $[AT]$ et $[AT']$. Soit P un point de (MM'). Notons $[UV]$ la corde de Γ telle que (PU) et (PV) soient tangentes à Γ. La droite (UV) coupe (MM') en Q. Montrer que le triangle PAQ est rectangle.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit. On note P, Q, R les points de contact de ω avec $(BC), (CA)$ et (AB). Un cercle passant par B et C est tangent en X à ω, un cercle passant par C et A est tangent en Y à ω et un cercle passant par A et B est tangent en Z à ω. Montrer que les droites $(PX), (QY)$ et (RZ) sont concourantes.

Exercice 8. Soit ABC un triangle. On note P le milieu de l'arc du cercle circonscrit à ABC contenant A. On suppose que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le cercle de diamètre $[PC]$ en deux points D et E. Soit F le symétrique de E par rapport à (BC) et I le milieu de $[BC]$. Montrer que B, D, F, I sont cocycliques.

Exercice 9. Soit ABC un triangle isocèle en A, D le pied de la hauteur issue de A et M un point intérieur à ADC tel que $\widehat{AMB}$ est obtus et $\widehat{DBM} + \widehat{DAM} = \widehat{MCB}$. Les droites (CM) et (AD) se coupent en P, et les droites (BM) et (AD) se coupent en Q. Soit S un point de $[AB]$ et R un point de $[AM)$ qui n'est pas sur $[AM]$ tel que $\widehat{SQB} = \widehat{DPC}$ et $\widehat{MRQ} = 2\widehat{QAM}$. Montrer que QRS est isocèle.