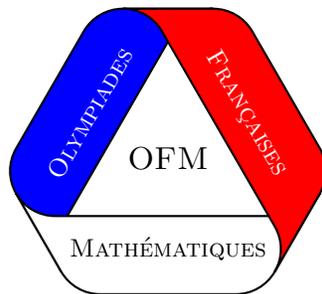


# OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



ENVOI NO. 5

POUR LE 15 MARS 2014

## Exercices du groupe B

**Exercice 1.** Soit  $ABCD$  un carré de côté 1. À l'intérieur du carré, on trace les arcs de cercles de centres  $A, B, C, D$  et de rayon 1. Déterminer l'aire de chaque portion délimitée à l'intérieur du carré.

**Exercice 2.** Dans un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$ , on trace une corde  $[CD]$ . Soit  $\Gamma$  le cercle de diamètre  $[CD]$  et  $O'$  son centre. La médiatrice de  $[CD]$  coupe le cercle  $\mathcal{C}$  en deux points  $A$  et  $B$  tels que  $A$  est extérieur à  $\Gamma$ . Notons  $T$  et  $T'$  les points de contact des tangentes à  $\Gamma$  passant par  $A$ . Soit  $F$  le milieu de  $[TT']$ . Montrer que  $O'$  est le milieu de  $[BF]$ .

**Exercice 3.** Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ . Soient  $M$  et  $N$  deux points de  $[BC]$ . Les droites  $[AM]$  et  $[AN]$  recoupent le cercle circonscrit à  $ABC$  en  $P$  et  $Q$ .

1) Montrer que  $M, N, P, Q$  sont cocycliques.

2) Soient  $R_1$  et  $R_2$  les rayons des cercles circonscrits à  $BMP$  et  $CMP$ . Calculer  $R_1 + R_2$  en fonction des longueurs  $AB$  et  $BC$ .

## Exercices communs

**Exercice 4.** Soit  $ABC$  un triangle. Les bissectrices de  $\hat{A}, \hat{B}$  et  $\hat{C}$  recoupent le cercle circonscrit en  $A', B'$  et  $C'$  respectivement. Soit  $I$  le centre du cercle inscrit à  $ABC$ . Les cercles de diamètres  $[IA'], [IB']$  et  $[IC']$  coupent respectivement les droites  $(BC), (CA)$  et  $(AB)$  en  $A_1$  et  $A_2, B_1$  et  $B_2, C_1$  et  $C_2$ . Montrer que  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  sont cocycliques.

**Exercice 5.** Soit  $ABCD$  un quadrilatère cyclique. Un cercle passant par  $A$  et  $B$  coupe  $[AC]$  et  $[BD]$  en  $E$  et  $F$ . Les droites  $(AF)$  et  $(BE)$  coupent  $[BC]$  et  $[AD]$  en  $P$  et  $Q$  respectivement. Montrer que  $(PQ)$  est parallèle à  $(CD)$ .

**Exercice 6.** Soit  $A$  un point extérieur à un cercle  $\Gamma$ . On mène deux tangentes  $[AT]$  et  $[AT']$  issues de  $A$ . Soient  $M$  et  $M'$  les milieux de  $[AT]$  et  $[AT']$ . Soit  $P$  un point de  $(MM')$ . Notons  $[UV]$  la corde de  $\Gamma$  telle que  $(PU)$  et  $(PV)$  soient tangentes à  $\Gamma$ . La droite  $(UV)$  coupe  $(MM')$  en  $Q$ . Montrer que le triangle  $PAQ$  est rectangle.

## Exercices du groupe A

**Exercice 7.** Soit  $ABC$  un triangle et  $\omega$  son cercle inscrit. On note  $P, Q, R$  les points de contact de  $\omega$  avec  $(BC), (CA)$  et  $(AB)$ . Un cercle passant par  $B$  et  $C$  est tangent en  $X$  à  $\omega$ , un cercle passant par  $C$  et  $A$  est tangent en  $Y$  à  $\omega$  et un cercle passant par  $A$  et  $B$  est tangent en  $Z$  à  $\omega$ . Montrer que les droites  $(PX), (QY)$  et  $(RZ)$  sont concourantes.

**Exercice 8.** Soit  $ABC$  un triangle. On note  $P$  le milieu de l'arc du cercle circonscrit à  $ABC$  contenant  $A$ . On suppose que la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$  coupe le cercle de diamètre  $[PC]$  en deux points  $D$  et  $E$ . Soit  $F$  le symétrique de  $E$  par rapport à  $(BC)$  et  $I$  le milieu de  $[BC]$ . Montrer que  $B, D, F, I$  sont cocycliques.

**Exercice 9.** Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ ,  $D$  le pied de la hauteur issue de  $A$  et  $M$  un point intérieur à  $ADC$  tel que  $\widehat{AMB}$  est obtus et  $\widehat{DBM} + \widehat{DAM} = \widehat{MCB}$ . Les droites  $(CM)$  et  $(AD)$  se coupent en  $P$ , et les droites  $(BM)$  et  $(AD)$  se coupent en  $Q$ . Soit  $S$  un point de  $[AB]$  et  $R$  un point de  $[AM]$  qui n'est pas sur  $[AM]$  tel que  $\widehat{SQB} = \widehat{DPC}$  et  $\widehat{MRQ} = 2\widehat{QAM}$ . Montrer que  $QRS$  est isocèle.