OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

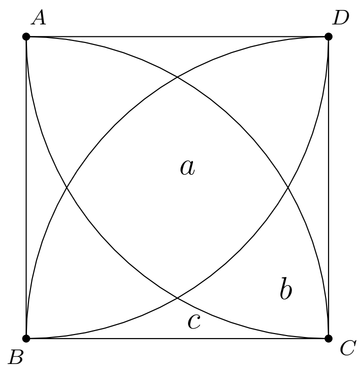
Envoi no. 5

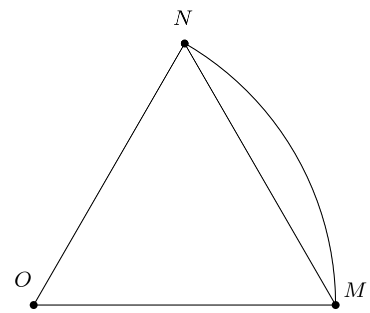
Corrigé

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. À l'intérieur du carré, on trace les arcs de cercles de centres A, B, C, D et de rayon 1. Déterminer l'aire de chaque portion délimitée à l'intérieur du carré.

Solution de l'exercice 1
Considérons les aires a, b, c des portions indiquées sur la figure.





Comme l'aire du carré est égale à 1, on a

$$a + 4b + 4c = 1. \tag{1}$$

Comme l'aire du quart de cercle ABC est égale à $\pi/4$, on a

$$a + 3b + 2c = \pi/4. \tag{2}$$

Considérons maintenant le secteur angulaire OMN de rayon 1 et d'angle $\pi/3$. Il a pour aire $\pi/6$. D'autre part, le triangle OMN a pour aire $\frac{\sqrt{3}}{4}$, donc l'aire de la "lune" est égale à $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. On en déduit que

$$a + 2b + c = 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{3}$$

En soustrayant les équations (1) et (2) et les équations (1) et (3), on en déduit

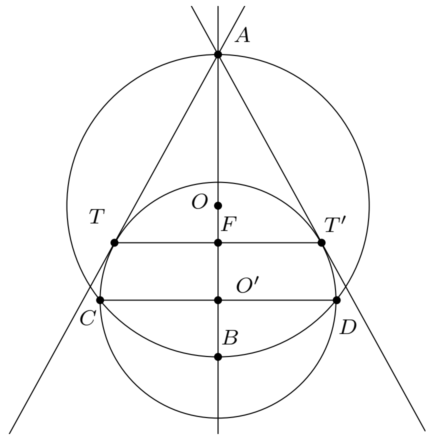
$$\begin{aligned} b + 2c &= 1 - \frac{\pi}{4} \\ 2b + 3c &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ce qui donne facilement

$$\begin{aligned} b &= -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \\ c &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \\ a &= 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, on trace une corde $[CD]$. Soit Γ le cercle de diamètre $[CD]$ et O' son centre. La médiatrice de $[CD]$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points A et B tels que A est extérieur à Γ. Notons T et T' les points de contact des tangentes à Γ passant par A. Soit F le milieu de $[TT']$. Montrer que O' est le milieu de $[BF]$.

Solution de l'exercice 2



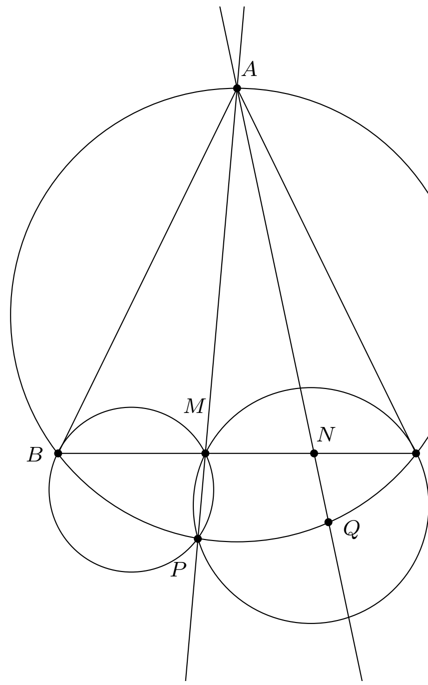
Comme les triangles AFT et ATO' sont semblables, on a $\dfrac{AF}{AT} = \dfrac{AT}{AO'}$. Or, $AT^2 = AO'^2 - O'T^2 = AO'^2 - O'C^2$ donc $AF = \dfrac{AO'^2 - O'C^2}{AO'}$.

Comme les triangles ACB et $AO'C$ sont semblables, on a $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AO'}$. Or, $AC^2 = AO'^2 + O'C^2$ donc $AB = \dfrac{AO'^2 + O'C^2}{AO'}$.

En additionnant les égalités précédemment trouvées, on obtient $\dfrac{AF + AB}{2} = AO'$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soient M et N deux points de $[BC]$. Les droites $[AM]$ et $[AN]$ recoupent le cercle circonscrit à ABC en P et Q.
1) Montrer que M, N, P, Q sont cocycliques.
2) Soient R_1 et R_2 les rayons des cercles circonscrits à BMP et CMP. Calculer $R_1 + R_2$ en fonction des longueurs AB et BC.

Solution de l'exercice 3



1) $\widehat{PMN} = \widehat{PMC} = \pi - \widehat{MCP} - \widehat{CPM} = \pi - \widehat{BCP} - \widehat{CPA} = \pi - \widehat{BCP} - \widehat{CBA}$, et
$\widehat{NQP} = \widehat{AQP} = \widehat{ACP} = \widehat{ACB} + \widehat{BCP} = \widehat{CBA} + \widehat{BCP}$,
donc $\widehat{PMN} = \pi - \widehat{NQP}$, ce qui prouve la cocyclicité de M, N, P, Q.
2) D'après la loi des sinus, on a

$$2(R_1 + R_2) = \frac{BM}{\sin \widehat{MPB}} + \frac{CM}{\sin \widehat{CPM}}.$$

Or, $\widehat{MPB} = \widehat{APB} = \widehat{ACB}$ et de même $\widehat{CPM} = \widehat{ACB}$, donc

$$2(R_1 + R_2) = \frac{BM + CM}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{BC}{\sin \widehat{ACB}}.$$

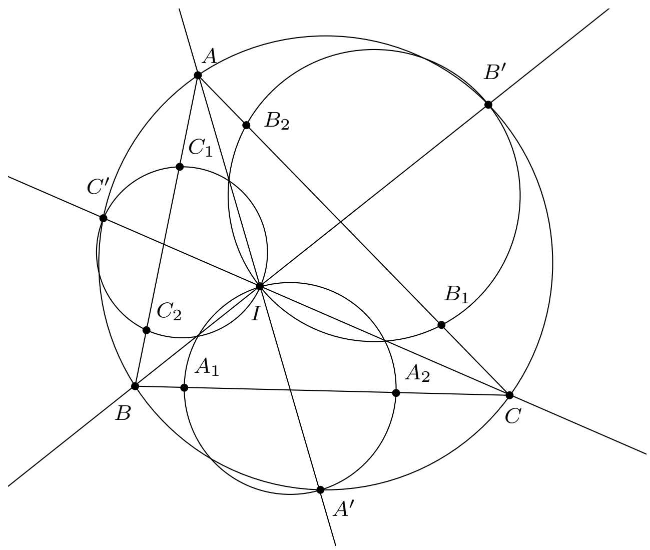
D'autre part, soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). On a $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{\sqrt{AB^2 - (BC/2)^2}}{AB}$, donc

$$R_1 + R_2 = \frac{AB \times BC}{2\sqrt{AB^2 - (BC/2)^2}}.$$

Exercices communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle. Les bissectrices de $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$ recoupent le cercle circonscrit en A', B' et C' respectivement. Soit I le centre du cercle inscrit à ABC. Les cercles de diamètres $[IA'], [IB']$ et $[IC']$ coupent respectivement les droites $(BC), (CA)$ et (AB) en A_1 et A_2, B_2 et B_2, C_1 et C_2. Montrer que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



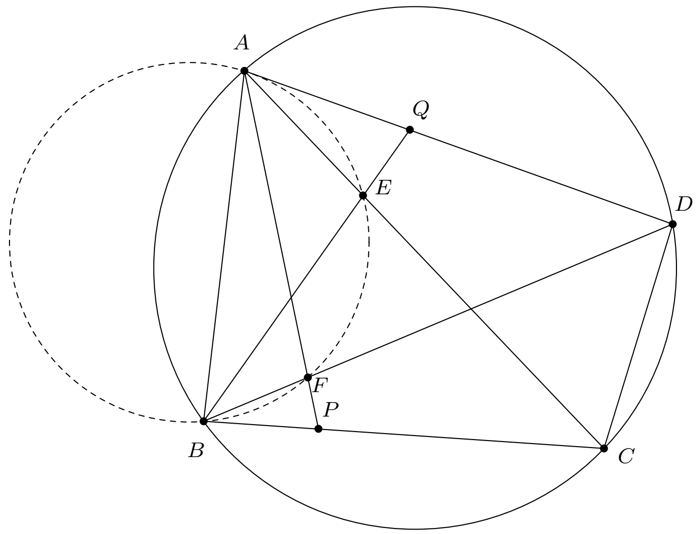
Notons Γ_A, Γ_B et Γ_C les cercles de diamètres respectifs $[IA'], [IB']$ et $[IC']$.
Remarquons d'abord que I est l'orthocentre de $A'B'C'$. Pour le voir, montrons par exemple que $(A'C') \perp (B'I)$:

$$\begin{aligned}(B'I, A'C') &= (BB', A'C') = (BB', BA) + (AB, AA') + (A'A, A'C') \\ &= (BB', BA) + (AB, AA') + (CA, CC') \\ &= \frac{\widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.\end{aligned}$$

Soit B'' le pied de la hauteur de $A'B'C'$ issue de B'. Alors B, B'' et I sont alignés d'après ce qui précède.
D'autre part, comme $(IB'') \perp (B''A')$, B'' appartient à Γ_A. De même, il appartient à Γ_C, donc l'axe radical de ces deux cercles est (IB''). On en déduit que B appartient également à cet axe radical, ce qui entraîne que $BA_1 \cdot BA_2 = BC_1 \cdot BC_2$ et donc A_1, A_2, C_1, C_2 sont cocycliques. Soit Γ_{CA} le cercle passant par ces points.
On définit de même Γ_{AB} et Γ_{BC}. Si ces trois cercles étaient deux à deux distincts, alors leurs axes radicaux pris deux à deux seraient (AB), (BC) et (CA) et ne seraient ni concourants ni parallèles, ce qui est impossible.
Donc deux de ces cercles sont confondus, et par conséquent $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Un cercle passant par A et B coupe $[AC]$ et $[BD]$ en E et F. Les droites (AF) et (BE) coupent $[BC]$ et $[AD]$ en P et Q respectivement. Montrer que (PQ) est parallèle à (CD).

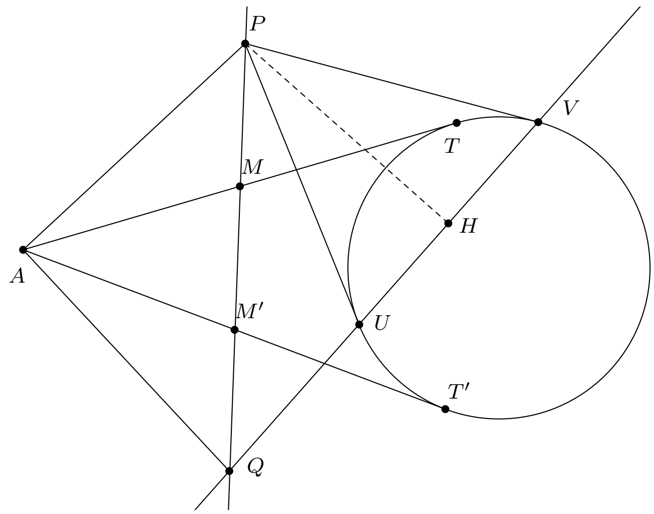
<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



$\widehat{AQB} = \widehat{AQE} = \pi - \widehat{QEA} - \widehat{EAQ} = \widehat{AEB} - \widehat{CAD}$ et de même, $\widehat{APB} = \widehat{AFB} - \widehat{CBD}$. Or, $\widehat{AEB} = \widehat{AFB}$ et $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$, donc $\widehat{AQB} = \widehat{APB}$. On en déduit que A, B, P, Q sont cocycliques. Il vient : $(AD, PQ) = (QA, QP) = (BA, BP) = (BA, BC) = (DA, DC)$, donc (PQ) et (DC) sont parallèles.

Exercice 6. Soit A un point extérieur à un cercle Γ. On mène deux tangentes $[AT]$ et $[AT']$ issues de A. Soient M et M' les milieux de $[AT]$ et $[AT']$. Soit P un point de (MM'). Notons $[UV]$ la corde de Γ telle que (PU) et (PV) soient tangentes à Γ. La droite (UV) coupe (MM') en Q. Montrer que le triangle PAQ est rectangle.

Solution de l'exercice 6



Comme $MA = MT$, M appartient à l'axe radical de A et Γ (A étant considéré comme un cercle de rayon nul). De même, M' appartient à cet axe radical, donc P et Q également. On en déduit que $PA = PU = PV$ et que $QA^2 = QU \cdot QV$.
Notons H le projeté orthogonal de P sur (UV). On a

$$\begin{aligned} PA^2 + QA^2 &= PU^2 + QU \cdot QV = PH^2 + HU^2 + (QH - HU)(QH + HU) \\ &= PH^2 + HU^2 + QH^2 - HU^2 = PH^2 + QH^2 = PQ^2, \end{aligned}$$

donc PAQ est rectangle en A.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit ABC un triangle et ω son cercle inscrit. On note P, Q, R les points de contact de ω avec $(BC), (CA)$ et (AB). Un cercle passant par B et C est tangent en X à ω, un cercle passant par C et A est tangent en Y à ω et un cercle passant par A et B est tangent en Z à ω. Montrer que les droites $(PX), (QY)$ et (RZ) sont concourantes.

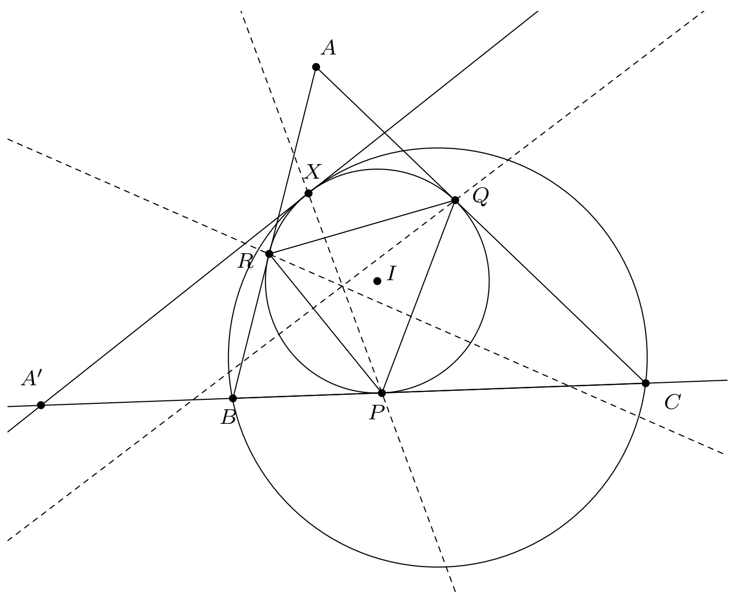
Solution de l'exercice 7

Rappelons d'abord quelques résultats sur la polarité que nous allons utiliser. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Si P est un point distinct de O, la polaire de P par rapport à $\mathcal{C}$ est la droite formée des points M tels que $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = R^2$. Le pôle par rapport à $\mathcal{C}$ d'une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par O est l'unique point P tel que pour tout M appartenant à $\mathcal{D}$ on a $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = R^2$.
À partir de cette définition, il est facile de montrer les propriétés suivantes :

(i) si P est un point extérieur à $\mathcal{C}$ et (PT), (PT') sont les deux tangentes à $\mathcal{C}$, alors la polaire de P est la droite (TT') ;

(ii) trois points donnés sont alignés si et seulement si leurs polaires sont concourantes.

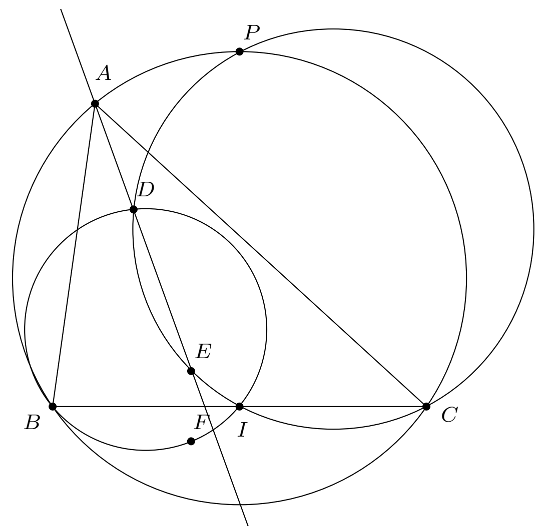
(Remarque : pour la propriété (ii), la droite sur laquelle se trouvent les trois points est la polaire du point de rencontre des trois droites.)



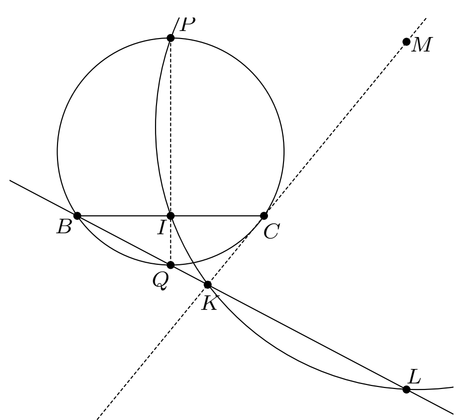
Revenons à l'exercice. Notons Γ_A le cercle passant par B, C et X. On définit de même les cercles Γ_B et Γ_C. Soit A' le point de rencontre entre la tangente commune à ω et Γ_X, et la droite (BC). On définit de même les points B' et C'.
D'après la propriété (ii), la polaire de A' par rapport à ω est la droite (PX). Il suffit donc d'après la propriété (i) de montrer que A', B' et C' sont alignés.
Soit Γ le cercle circonscrit à ABC. Comme A' appartient à l'axe radical (BC) de Γ et Γ_A, on a $\mathcal{P}_\Gamma(A') = \mathcal{P}_{\Gamma_A}(A') = A'X^2 = \mathcal{P}_\omega(A')$. On en déduit que A' appartient à l'axe radical de Γ et ω. Il en va de même pour B' et C', ce qui prouve que A', B' et C' sont alignés.

Exercice 8. Soit ABC un triangle. On note P le milieu de l'arc du cercle circonscrit à ABC contenant A. On suppose que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le cercle de diamètre $[PC]$ en deux points D et E. Soit F le symétrique de E par rapport à (BC) et I le milieu de $[BC]$. Montrer que B, D, F, I sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8

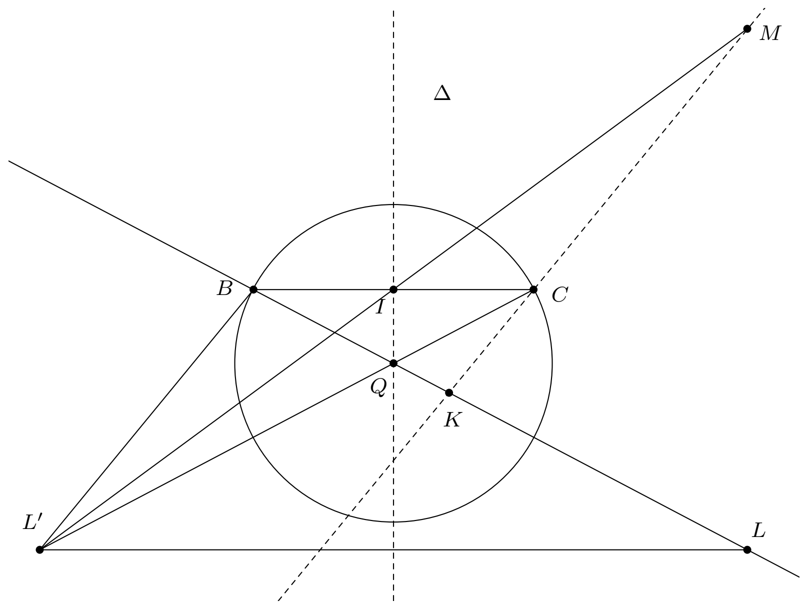


On applique l'inversion i de pôle I et de puissance $-IB \cdot IC$. Soit Q le point diamétralement opposé à P. Alors i échange P et Q d'une part, et B et C d'autre part. Comme le cercle de diamètre $[PC]$ passe par I, son image par i est une droite. Or, $i(P) = Q$ et $i(C) = B$, donc i transforme le cercle de diamètre $[PC]$ en la droite (BQ).
La bissectrice de $\widehat{A}$ est transformée en un cercle passant par I et par P.
Notons $K = i(D)$, $L = i(E)$ et $M = i(F)$. D'après ce qui précède, les points K et L appartiennent à (BQ), et P, I, K, L sont cocycliques. De plus, L et M sont symétriques par rapport à (BC).



Enfin, remarquons que $QI \cdot QP = QB^2$ car QBI et QPB sont semblables. En utilisant la puissance par rapport au cercle $PIKL$, on obtient que $QK \cdot QL = QB^2$, donc K et L sont inverses par rapport au cercle de centre Q et de rayon QB. On est ainsi ramenés à démontrer le lemme suivant :

Lemme : *Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Q. Soit $[BC]$ une corde de $\mathcal{C}$ et L un point de (QB). Alors C, l'inverse de L par rapport à $\mathcal{C}$ et le symétrique de L par rapport à (BC) sont alignés.*



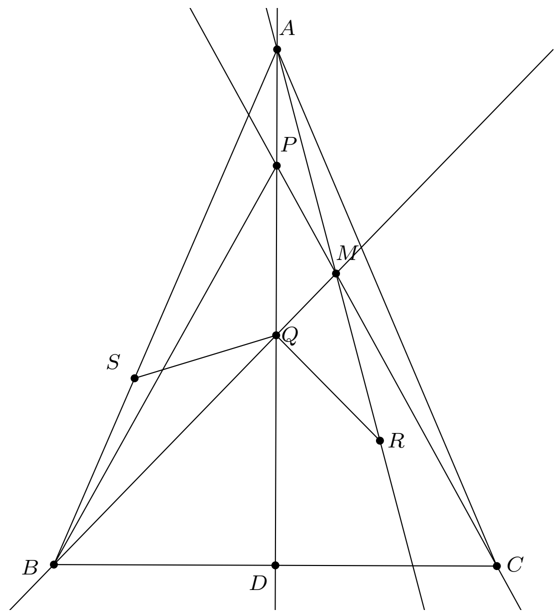
Première démonstration du lemme : on note toujours I le milieu de $[BC]$. Soit Δ la médiatrice de $[BC]$ et L' le symétrique de L par rapport à Δ. On a

$$[BL'] = \mathrm{sym}_\Delta([CL]) = \mathrm{sym}_\Delta \mathrm{sym}_{(BC)}([CM]) = \mathrm{sym}_I([CM]),$$

donc (CM) et $(L'B)$ sont parallèles.
D'autre part, $\dfrac{QB}{QK} = \dfrac{QL}{QB} = \dfrac{QL'}{QC}$ donc $(L'B)$ et (CK) sont parallèles. Finalement, (CM) et (CK) sont parallèles, donc C, K, M sont alignés.
Deuxième démonstration du lemme : on conserve les notations du paragraphe précédent. On note b, c, k, ℓ, ℓ', m les affixes de B, C, K, L, L', M, et on peut supposer que Q est l'origine, que $|b| = 1$ et que $c = \bar{b}$.
Comme L appartient à (QB), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = tb$.
Comme K et L sont inverses par rapport au cercle, on a $k = \frac{1}{t}b$.
On a $\ell' = \bar{\ell}$. Le fait que L' est le symétrique M par rapport à I se traduit par $\ell' + m = b + c$. Il vient $m = b + c - \bar{\ell} = b + c - tc$.
On en déduit que $\overrightarrow{CM} = m - c = b - tc = tk - tc = t\overrightarrow{CK}$, par conséquent C, K, M sont alignés.

Exercice 9. Soit ABC un triangle isocèle en A, D le pied de la hauteur issue de A et M un point intérieur à ADC tel que $\widehat{AMB}$ est obtus et $\widehat{DBM} + \widehat{DAM} = \widehat{MCB}$. Les droites (CM) et (AD) se coupent en P, et les droites (BM) et (AD) se coupent en Q. Soit S un point de $[AB]$ et R un point de $[AM)$ qui n'est pas sur $[AM]$ tel que $\widehat{SQB} = \widehat{DPC}$ et $\widehat{MRQ} = 2\widehat{QAM}$. Montrer que QRS est isocèle.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Notons $\alpha = \widehat{BAD}$, $\beta = \widehat{CBM}$, $\gamma = \widehat{MCB}$ et $\theta = \widehat{DAM}$. Par hypothèse, on a $\beta + \theta = \gamma$, $\widehat{SQB} = \widehat{DPC} = \frac{\pi}{2} - \gamma$ et $\widehat{MRQ} = 2\theta$.
On a $\widehat{QSA} = \pi - \widehat{BSQ} = \widehat{QBS} + \widehat{SQB} = (\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta) + (\frac{\pi}{2} - \gamma) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.
D'après la loi des sinus pour les triangles QAS et QAR, on a

$$\frac{QS}{QR} = \frac{QS}{QA} \times \frac{QA}{QR} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\alpha\cos\theta}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

On doit montrer que ce rapport est égal à 1.
D'après le théorème de Ceva trigonométrique appliqué au point M dans le triangle ABC, on a

$$\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)} \times \frac{\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta)} \times \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha-\gamma)}{\sin\gamma} = 1,$$

donc $\sin(\alpha+\theta)\sin\beta\cos(\alpha+\gamma) = \sin(\alpha-\theta)\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$.
En utilisant l'identité $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$, on en déduit

$$\sin(\alpha+\theta)[\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\gamma-\beta)] = \sin(\alpha-\theta)[\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\beta-\gamma)].$$

Compte tenu de $\gamma - \beta = \theta$,

$$\sin(\alpha+\theta)[\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha+\theta)] = \sin(\alpha-\theta)[\sin(\alpha+\beta+\gamma) - \sin(\alpha-\theta)],$$

ou encore $(\sin(\alpha+\theta) - \sin(\alpha-\theta))[\sin(\alpha+\beta+\gamma) - (\sin(\alpha+\theta) + \sin(\alpha-\theta))]$.
Il vient $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(\alpha+\theta) + \sin(\alpha-\theta)) = 2\sin\alpha\cos\theta$.