# *Olympiades Françaises de Mathématiques 2013-2014*

## *Envoi Numéro 4*

*À renvoyer au plus tard le samedi 15 février*

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 1999 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2012-2013 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

## Exercices du groupe B

*Exercice 1.* Combien existe-t-il de couples d'entiers strictement positifs $(a, b)$ tels que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2014}?$$

*Exercice 2.* Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que $2^n + 12^n + 2014^n$ soit un carré parfait.

*Exercice 3.* Trouver tous les couples d'entiers relatifs $(x, y)$ tels que $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

## Exercices Communs

*Exercice 4.* Trouver tous les couples d'entiers positifs $(m, n)$ tels que $1 + (m + n)m$ divise $(m + n)(n + 1) - 1$.

*Exercice 5.* Montrer que si la somme de tous les diviseurs positifs d'un entier $n \geqslant 1$ est une puissance de deux, alors le nombre de diviseurs positifs de $n$ est une puissance de deux.

*Exercice 6.* Trouver tous les nombres premiers $p$ et $q$ tels que $p$ divise $5^q + 1$ et $q$ divise $5^p + 1$.

## Exercices du groupe A

*Exercice 7.* Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $2mn + mf(m) + nf(n)$ est un carré parfait pour tous entiers positifs $m$ et $n$.

*Exercice 8.* Trouver tous les triplets d'entiers $(a, b, c)$ tels que $a \neq 0$ et

$$2a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^2.$$

*Exercice 9.* Trouver le nombre de suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers relatifs telles que $u_n \neq -1$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et telles que

$$u_{n+2} = \frac{2014 + u_n}{1 + u_{n+1}}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

*Fin*