Olympiades Françaises de Mathématiques 2013-2014

Envoi Numéro 4 – Corrigé

Exercices du groupe B

Exercice 1. Combien existe-t-il de couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2014}?$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Soient a, b deux entiers strictement positifs tels que $1/a + 1/b = 1/2014$. On a en particulier $a, b > 2014$. On peut donc multiplier l'équation ab : on cherche en fait les entiers $a, b > 2014$ tels que $ab - 2014a - 2014b = 0$ ou encore, de manière équivalente, tels que $(a - 2014)(b - 2014) = 2014^2$. On en déduit que le nombre recherché est le nombre de couples d'entiers strictement positifs (u, v) tels que $uv = 2014^2$, autrement dit le nombre de diviseurs positifs de 2014^2. Comme $2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$, 2014^2 possède $(2+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 27$ diviseurs positifs.

La réponse est donc 27.

Exercice 2. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que $2^n + 12^n + 2014^n$ soit un carré parfait.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Regardons l'expression modulo 3 : $2^n + 12^n + 2014^n \equiv (-1)^n + 1 \mod 3$. Comme un carré n'est jamais congru à 2 modulo 3, on en déduit que n est impair. Regardons ensuite l'expression modulo 7 :

$$2^n + 12^n + 2014^n \equiv 2^n + (-2)^n + 5^n \equiv 5^n \mod 7$$

car n est impair. Lorsque n est impair, 5^n ne peut être congru qu'à 3, 5 ou 6 modulo 7. Or un carré est congru à $0, 1, 2$ ou 4 modulo 7. Il n'existe donc pas d'entiers $n \geqslant 1$ tels que $2^n + 12^n + 2014^n$ soit un carré parfait.

Exercice 3. Trouver tous les couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit (x, y) un couple solution. Comme $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$, on a donc soit $x + y = 0$, soit $x^2 - xy + y^2 = x + y$. Dans le deuxième cas, on remarque qu'alors nécessairement

$(x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2$. Parmi les trois entiers $x-1, y-1$ et $x-y$, deux sont donc égaux à 1 ou -1 et le troisième est nul. On vérifie que les seules possibilités sont $(2,2)$, $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,0)$, $(2,1)$ et $(0,1)$.

Ainsi, les solutions sont les couples $(2,2)$, $(1,2)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ et $(x,-x)$ où x est un entier relatif.

Exercices Communs

Exercice 4. Trouver tous les couples d'entiers positifs (m,n) tels que $1+(m+n)m$ divise $(m+n)(n+1)-1$.

Solution de l'exercice 4 Soit (m,n) un couple solution. Alors $1+(m+n)m$ divise $(m+n)(n+1)-1+1+(m+n)m=(m+n)(m+n+1)$. Or, $1+(m+n)m$ est premier avec $m+n$. Ainsi, $1+(m+n)m$ divise $m+n+1$. Donc $m^2+mn+1 \leqslant m+n+1$. Donc $m=0$ ou $m=1$.

Réciproquement, on vérifie que les couples $(0,n)$ et $(1,n)$, où $n \geqslant 0$ est un entier, conviennent.

Exercice 5. Montrer que si la somme de tous les diviseurs positifs d'un entier $n \geqslant 1$ est une puissance de deux, alors le nombre de diviseurs positifs de n est une puissance de deux.

Solution de l'exercice 5 Décomposons n en produit de facteurs premiers : $n=\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$. On voit aisément que la somme des diviseurs positifs de n, notée $\sigma(n)$, vaut

$$\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\alpha_i}).$$

Ainsi, si $1 \leqslant i \leqslant k$, $1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\alpha_i}$ est une puissance de deux. Ceci implique clairement que $p_i \neq 2$. Supposons ensuite par l'absurde que α_i+1 n'est pas une puissance de deux et choisissons q un nombre premier impair divisant α_i+1. Alors

$$1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\alpha_i}=(1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{q-1})\cdot(1+p_i^q+p_i^{2q}+\cdots+p_i^{\alpha_i+1-q}).$$

En effet, cette égalité découle du fait que $(p_i^{\alpha_i+1}-1)/(p-1)=(p_i^q-1)/(p-1)\cdot(p_i^{\alpha_i+1}-1)/(p^q-1)$. Ceci est absurde, car $1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{q-1}$ est impair. Ainsi, α_i+1 est une puissance de deux pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$. Ceci conclut, car le nombre de diviseurs (positifs) de n est $\prod_{i=1}^k(\alpha_i+1)$.

Exercice 6. Trouver tous les nombres premiers p et q tels que p divise 5^q+1 et q divise 5^p+1.

Solution de l'exercice 6 Notons α l'ordre de 5 modulo q et β l'ordre de 5 modulo p. Comme $5^{2p} \equiv 1 \mod q$, on en déduit que α divise $2p$. Donc $\alpha=1,2,p$ ou $2p$.

Si $\alpha=1$, alors $5 \equiv 1 \mod q$, donc $q=2$. Si $\alpha=2$, alors $25 \equiv 1 \mod q$, donc $q=2$ ou $q=3$.

Si $q=2$, alors p divise 5^2+1, donc $p=2$ ou $p=13$. Réciproquement, $(2,2)$ et $(13,2)$ conviennent.

Si $q=3$, alors p divise 5^3+1, donc $p=2,3$ ou 7. Réciproquement, on vérifie que $(3,3)$, $(7,3)$ conviennent, mais que $(2,3)$ ne convient pas.

De même, on a $\beta=1,2,q$ ou $2q$. Si $\beta=1$ ou 2, on obtient similairement les solutions $(2,13)$ et $(3,7)$.

Supposons maintenant que $\alpha=p$ ou $2p$ et que $\beta=q$ ou $2q$. D'après le petit théorème de Fermat, $5^{p-1} \equiv 1 \mod p$ et $5^{q-1} \equiv 1 \mod q$. Donc β divise $p-1$ et α divise $q-1$. Donc q divise $p-1$ et p divise $q-1$. Donc $q \leqslant p-1$ et $p \leqslant q-1$. Ainsi $q \leqslant q-2$, ce qui est absurde.

Les solutions sont donc $(2,2)$, $(3,3)$, $(13,2)$, $(2,13)$, $(3,7)$ et $(7,3)$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $2mn + mf(m) + nf(n)$ est un carré parfait pour tous entiers positifs m et n.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Pour simplifier, posons $F(m,n) = 2mn + mf(m) + nf(n)$. Alors $F(m,0) = mf(m)$ est un carré pour tout $m \geqslant 1$.

On peut donc écrire $f(p) = pa^2$ pour un nombre premier p. Supposons que $a \geqslant 2$. Alors $(ap)^2 + 2p + f(1) = F(p,1) > (ap^2)$ est un carré, donc $(ap)^2 + 2p + f(1) \geqslant (ap+1)^2$ et $2p + f(1) \geqslant 2ap + 1 \geqslant 4p + 1$, de sorte que $p \leqslant (f(1)-1)/2$. Ainsi $f(p) = p$ pour tous nombres premiers p suffisamment grands.

Soit maintenant $k \geqslant 1$ et p un nombre premier suffisamment grand pour que $f(p) = p$, $p > kf(k)$ et $p > k^2 + 1$. Alors

$$(k+p-1)^2 = (k^2+1) + p^2 - 2k - 2p + 2kp < p^2 - p - 2k + 2kp < F(p,k) \text{ et}$$

$$F(p,k) = p^2 + 2kp + kf(k) < p^2 + 2kp + p \leqslant (p+k+1)^2.$$

Comme $F(p,k)$ est un carré, ceci impose que $kf(k) + p^2 + 2kp = (k+p)^2$ et donc que $f(k) = k$.

Réciproquement, on vérifie que la fonction identité convient.

Exercice 8. (Corée 2003) Trouver tous les triplets d'entiers (a,b,c) tels que $a \neq 0$ et

$$2a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^2.$$

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Supposons qu'il exise un tel triplet : soit alors $a > 0$ le plus petit entier tel que (a,b,c) soit solution. Si $d = \text{pgcd}(a,b)$, en divisant l'égalité par d^4 on voit que $(a/d, b/d, c/d^2)$ est également solution. On a donc $d = 1$.

Regardons l'expression $2a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ modulo 8, et utilisons le fait qu'un carré est congru à $0, 1$ ou 4 modulo 8 : si a est impair, alors $2a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ est congru à 2 ou à 5 modulo 8 ; a est donc forcément pair, et b es impair. Réécrivons l'égalité de l'énoncé en

$$(a^2)^2 + (a^2+b^2)^2 = c^2.$$

Le triplet (a^2, a^2+b^2, c) est donc pythagoricien. Comme $\text{pgcd}(a,b) = 1$, il existe des entiers u, v premiers entre eux tels que $a^2 = 2uv$, $a^2 + b^2 = u^2 - v^2$ et $c = u^2 + v^2$.

En regardant modulo 4, on obtient $1 \equiv a^2 + b^2 \equiv u^2 - v^2$. Puisqu'un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4, on en déduit que u est impair et que v est pair. Puisque $a^2 = 2uv$ et que u et v sont premiers entre eux, on peut écrire $u = m^2$ et $v = 2n^2$ avec m, n premiers entre eux et m impair. De $b^2 = u^2 - v^2 - 2uv$ il vient $2v^2 = (u - v + b)(u - v - b)$. Donc

$$2n^4 = \left(\frac{m^2 - 2n^2 + b}{2}\right)\left(\frac{m^2 - 2n^2 - b}{2}\right).$$

Posons $x = (m^2 - 2n^2 + b)/2$ et $y = (m^2 - 2n^2 - b)/2$: ce sont des entiers car m^2 et b sont impairs. En outre, $0 < a^2 + b^2 = (u-v)(u+v)$, et $u + v$ est positif, donc $u - v$ l'est également, et a fortiori $x = (u - v + b)/2 \geqslant 0$, puis $y \geqslant 0$ également.

D'aute part, on obtient $x - y = b$ et $xy = 2n^4$. Comme $\text{pgcd}(b,n) = 1$, x et y sont forcément premiers entre eux. Puisque $xy = 2n^4$, on peut écrire x et y sous la forme $x = 2k^4$ et $y = l^4$, ou bien $x = l^4$ et $y = 2k^4$, avec $\text{pgcd}(k,l) = 1$ et l impair.

Ainsi, $2k^4 + l^4 = x + y = m^2 - 2n^2$, et donc

$$m^2 = 2k^4 + l^4 + 2n^2 = 2k^4 + 2k^2l^2 + l^4.$$

Or, $2klm = 2mn = a > 0$, donc $lm \geqslant 1$ et $0 < k < a$, ce qui contredit la minimalité de a.

Il n'existe donc pas de triplet (a, b, c) solution lorsque $a \neq 0$.

Exercice 9. Trouver le nombre de suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers relatifs telles que $u_n \neq -1$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et telles que

$$u_{n+2} = \frac{2014 + u_n}{1 + u_{n+1}}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 9 La relation de l'énoncé impose que $(u_{n+1} - u_{n-1})(u_n + 1) = u_n - u_{n-2}$ pour $n \geqslant 3$. Par récurrence, il vient

$$u_3 - u_1 = \prod_{i=3}^{n} (u_i + 1)(u_{n+1} - u_{n-1}). \tag{1}$$

Supposons par l'absurde que $u_3 \neq u_1$. Ainsi $u_{n+1} \neq u_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$. En faisant croitre n, on voit qu'il ne peut pas y avoir une infinité de termes u_i tels que $u_i \neq 0, -2$. Ainsi, $u_i = 0$ ou -2 à partir d'un certain rang (car $u_3 - u_1$ a un nombre fini de diviseurs). On vérifie aisément à partir de la relation de récurence de l'énoncé que ceci n'est pas possible. Donc $u_3 = u_1$, et par (1) on en déduit que $u_{n+2} = u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Sous cette hypothèse, la relation à vérifier devient $(1 + u_{n+1})u_n = 2014 + u_n$, ou encore $u_n u_{n+1} = 2014$, ce qui est équivalent à $u_1 u_2 = 2014$. Ainsi, le nombre de suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ qui conviennent est le nombre paires d'entiers (a, b) telles que $ab = 2014$, avec $a \neq -1$ et $b \neq -1$: c'est exactement le nombre de diviseurs (positifs ou négatifs) de 2014, moins 2. Comme $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, celui-ci a $2 \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 16$ diviseurs (positifs ou négatifs), donc 14 suites conviennent.

Fin