Olympiades Françaises de Mathématiques 2013-2014

Envoi Numéro 3

À renvoyer au plus tard le mercredi 15 janvier

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 1999 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2012-2013 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B »ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Existe-t-il des réels $a, b, c, d > 0$ et $e, f, g, h < 0$ vérifiant simultanément

$$ae + bc > 0, ef + cg > 0, fd + gh > 0 \text{ et } da + hb > 0?$$

Exercice 2. Soit a, b, c des réels tels que $-1 \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant 1$ pour $x = -1, x = 0$ et $x = 1$. Prouver que

$$-\frac{5}{4} \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant \frac{5}{4} \text{ pour tout réel } x \in [-1, 1].$$

Exercice 3. Prouver que, pour tout réel $a \geqslant 0$, on a

$$a^3 + 2 \geqslant a^2 + 2\sqrt{a}.$$

Exercices Communs

Exercice 4. Prouver que si n est un entier strictement positif, l'expression

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{0}} + \sqrt{n+\sqrt{1}} + \sqrt{n+\sqrt{2}} + \cdots \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{\sqrt{n-\sqrt{0}} + \sqrt{n-\sqrt{1}} + \sqrt{n-\sqrt{2}} + \cdots \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} + \sqrt{n-\sqrt{n^2}}}$$

est indépendante de n.

Exercice 5. Soit (a_n) une suite définie par $a_1, a_2 \in [0, 100]$ et

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2 - 1} \quad \text{pour tout enter } n \geqslant 2.$$

Existe-t-il un entier n tel que $a_n > 2013$?

Exercice 6. Déterminer la plus grande valeur possible et la plus petite valeur possible de

$$\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2}$$

lorsque a, b, c sont des réels strictement positifs vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ qui vérifient les trois conditions suivantes pour tous réels x et y :
i) $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$,
ii) $f(-x) = f(x-1)$,
iii) si $1 < x < y$ alors $f(x) < f(y)$.

Exercice 8. Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels, de degrés $n \geqslant 0$. On suppose que le coefficient de x^n de chacun de ces deux polynômes est égal à 1 et que, pour tout réel x, on a $P(P(x)) = Q(Q(x))$.
Prouver que $P = Q$.

Exercice 9. Soit $n > 0$ un entier et $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. Prouver que :

$$\max_{x_1>0,\cdots,x_n>0} \min(x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, \cdots, \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}) =$$

$$\min_{x_1>0,\cdots,x_n>0} \max(x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, \cdots, \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}) = 2\cos(\frac{\pi}{n+2}).$$

Fin