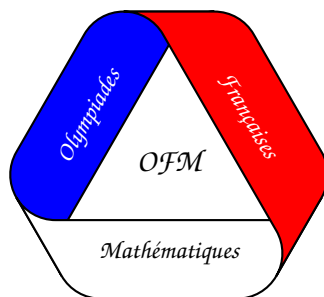
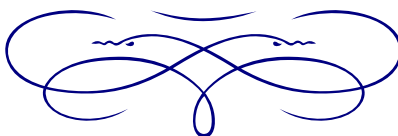


# Olympiades Françaises de Mathématiques 2013-2014



## Envoi Numéro 3

*À renvoyer au plus tard le mercredi 15 janvier*



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 1999 ou après, avec les exceptions suivantes :

- \* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
- \* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2012-2013 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- 
- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
  - Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
  - Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

- 
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
  - Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
  - Respecter la numérotation des exercices.

- 
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

## Exercices du groupe B

*Exercice 1.* Existe-t-il des réels  $a, b, c, d > 0$  et  $e, f, g, h < 0$  vérifiant simultanément

$$ae + bc > 0, ef + cg > 0, fd + gh > 0 \text{ et } da + hb > 0?$$



*Exercice 2.* Soit  $a, b, c$  des réels tels que  $-1 \leq ax^2 + bx + c \leq 1$  pour  $x = -1, x = 0$  et  $x = 1$ . Prouver que

$$-\frac{5}{4} \leq ax^2 + bx + c \leq \frac{5}{4} \text{ pour tout réel } x \in [-1, 1].$$



*Exercice 3.* Prouver que, pour tout réel  $a \geq 0$ , on a

$$a^3 + 2 \geq a^2 + 2\sqrt{a}.$$

## Exercices Communs

*Exercice 4.* Prouver que si  $n$  est un entier strictement positif, l'expression

$$\frac{\sqrt{n + \sqrt{0}} + \sqrt{n + \sqrt{1}} + \sqrt{n + \sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n^2 - 1}} + \sqrt{n + \sqrt{n^2}}}{\sqrt{n - \sqrt{0}} + \sqrt{n - \sqrt{1}} + \sqrt{n - \sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n - \sqrt{n^2 - 1}} + \sqrt{n - \sqrt{n^2}}}$$

est indépendante de  $n$ .



*Exercice 5.* Soit  $(a_n)$  une suite définie par  $a_1, a_2 \in [0, 100]$  et

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2 - 1} \text{ pour tout entier } n \geq 2.$$

Existe-t-il un entier  $n$  tel que  $a_n > 2013$  ?



*Exercice 6.* Déterminer la plus grande valeur possible et la plus petite valeur possible de

$$\sqrt{4 - a^2} + \sqrt{4 - b^2} + \sqrt{4 - c^2}$$

lorsque  $a, b, c$  sont des réels strictement positifs vérifiant  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ .

## Exercices du groupe A

*Exercice 7.* Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  qui vérifient les trois conditions suivantes pour tous réels  $x$  et  $y$  :

i)  $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$ ,

ii)  $f(-x) = f(x - 1)$ ,

iii) si  $1 < x < y$  alors  $f(x) < f(y)$ .



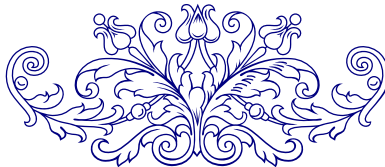
*Exercice 8.* Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes à coefficients réels, de degrés  $n \geq 0$ . On suppose que le coefficient de  $x^n$  de chacun de ces deux polynômes est égal à 1 et que, pour tout réel  $x$ , on a  $P(P(x)) = Q(Q(x))$ .

Prouver que  $P = Q$ .



*Exercice 9.* Soit  $n > 0$  un entier et  $x_1, \dots, x_n$  des réels strictement positifs. Prouver que :

$$\max_{x_1 > 0, \dots, x_n > 0} \min\left(x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, \dots, \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}\right) =$$
$$\min_{x_1 > 0, \dots, x_n > 0} \max\left(x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, \dots, \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right).$$



*Fin*