Olympiades Françaises de Mathématiques 2013-2014

Envoi Numéro 3 – Corrigé

Exercices du groupe B

Exercice 1. Existe-t-il des réels $a, b, c, d > 0$ et $e, f, g, h < 0$ vérifiant simultanément

$$ae + bc > 0, ef + cg > 0, fd + gh > 0 \text{ et } da + hb > 0?$$

Solution de l'exercice 1 Non, il n'en existe pas. Par l'absurde : supposons qu'il existe de tels réels.On commence par réécrire les inégalités, mais avec uniquement des termes positifs. On a donc

$$bc > a(-e) \text{ et } (-e)(-f) > c(-g) \text{ et } (-g)(-h) > (-f)d \text{ et } da > (-h)b$$

Si l'on multiplie toutes ces inégalités membres à membres (et, comme tout est positif, il n'y a aucun danger), il vient $abcdefgh > abcbdefgh$, d'où la contradiction cherchée.

Exercice 2. Soit a, b, c des réels tels que $-1 \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant 1$ pour $x = -1, x = 0$ et $x = 1$. Prouver que

$$-\frac{5}{4} \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant \frac{5}{4} \text{ pour tout réel } x \in [-1, 1].$$

Solution de l'exercice 2 Posons $P(x) = ax^2 + bx + c$. Alors $P(-1) = a - b + c, P(0) = c$ et $P(1) = a + b + c$. Et, d'après l'énoncé, on a $|P(-1)| \leqslant 1, |P(0)| \leqslant 1$ et $|P(1)| \leqslant 1$.
Or, pour tout réel x, on vérifie directement que

$$P(x) = \frac{x(x+1)}{2}P(1) - \frac{x(1-x)}{2}P(-1) + (1-x^2)P(0) \qquad (1).$$

- Soit $x \in [0;1]$. D'après (1) et l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leqslant \frac{x(x+1)}{2}|P(1)| + \frac{x(1-x)}{2}|P(-1)| + (1-x^2)|P(0)| \\ &\leqslant \frac{x(x+1)}{2} + \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) \\ &= -x^2+x+1 \\ &= \frac{5}{4} - (x-\frac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

Et ainsi $|P(x)| \leqslant \frac{5}{4}$.

- Soit $x \in [-1;0]$. D'après (1) et l'inégalité triangulaire, il vient cette fois

$$\begin{aligned} &\leqslant -\frac{x(x+1)}{2}|P(1)| - \frac{x(1-x)}{2}|P(-1)| + (1-x^2)|P(0)| \\ &\leqslant -\frac{x(x+1)}{2} - \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) \\ &= -x^2-x+1 \\ &= \frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

Et ainsi $|P(x)| \leqslant \frac{5}{4}$, à nouveau.
Finalement, pour tout $x \in [-1;1]$, on a $|P(x)| \leqslant \frac{5}{4}$.

Exercice 3. Prouver que, pour tout réel $a \geqslant 0$, on a

$$a^3 + 2 \geqslant a^2 + 2\sqrt{a}.$$

Solution de l'exercice 3 Pour tout réel $a \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} a^3 - a^2 - 2\sqrt{a} + 2 &= a^2(a-1) - 2(\sqrt{a}-1) \\ &= a^2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1) - 2(\sqrt{a}-1) \\ &= (\sqrt{a}-1)(a^2(\sqrt{a}+1)-2). \ (1) \end{aligned}$$

Or :
- Si $a \geqslant 1$ alors $\sqrt{a} \geqslant 1$ et $a^2 \geqslant 1$. Ainsi, on a $\sqrt{a}-1 \geqslant 0$ et $a^2(\sqrt{a}+1) \geqslant 2$. Par suite, chacun des facteurs de (1) est positif, ce qui assure que le produit est positif.

- Si $a \leqslant 1$ alors $\sqrt{a} \leqslant 1$ et $a^2 \leqslant 1$. Ainsi, on a $\sqrt{a}-1 \leqslant 0$ et $a^2(\sqrt{a}+1) \leqslant 2$. Par suite, chacun des deux facteurs de (1) est négatif, et le produit est donc encore positif.

Finalement, pour tout réel $a \geqslant 0$, on a $a^3 - a^2 - 2\sqrt{a} + 2 \geqslant 0$ ou encore $a^3 + 2 \geqslant a^2 + 2\sqrt{a}$.

Exercices Communs

Exercice 4. Prouver que si n est un entier strictement positif, l'expression

$$\frac{\sqrt{n+\sqrt{0}}+\sqrt{n+\sqrt{1}}+\sqrt{n+\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2}}}{\sqrt{n-\sqrt{0}}+\sqrt{n-\sqrt{1}}+\sqrt{n-\sqrt{2}}+\cdots\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n-\sqrt{n^2}}}$$

est indépendante de n.

Solution de l'exercice 4 En calculant le carré de chacun des deux membres, on déduit que, pour tous réels a, b tels que $0 \leqslant b \leqslant a$, on a

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

En particulier, pour tous entiers naturels n et m, avec $m \leqslant n^2$, on a

$$\sqrt{n+\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-m}}{2}} + \sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-m}}{2}}.$$

Soit $n > 0$ un entier. On a donc

$$\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n+\sqrt{m}} = \sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{\frac{n+\sqrt{n^2-m}}{2}} + \sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{\frac{n-\sqrt{n^2-m}}{2}}$$

D'où, après réindexation :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n+\sqrt{m}} &= \sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{\frac{n+\sqrt{m}}{2}} + \sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{\frac{n-\sqrt{m}}{2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n+\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n-\sqrt{m}}\end{aligned}$$

Ainsi $(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n+\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n-\sqrt{m}}$

et donc $\dfrac{\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n+\sqrt{m}}}{\sum_{m=0}^{n^2}\sqrt{n-\sqrt{m}}} = 1+\sqrt{2}$, qui est bien une valeur indépendante de n.

Exercice 5. Soit (a_n) une suite définie par $a_1, a_2 \in [0, 100]$ et

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n^2-1} \quad \text{pour tout enter } n \geqslant 2.$$

Existe-t-il un entier n tel que $a_n > 2013$?

Solution de l'exercice 5 La réponse est non.

Plus précisément, montrons par récurrence que l'on a $a_n \leqslant 400$, pour tout $n \geqslant 0$.

L'inégalité est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$, d'après l'énoncé.
Supposons qu'elle soit vraie pour tout $k \leqslant n$ pour un certain entier $n \geqslant 2$.
Pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$, on a $a_{k+1} = a_k + \frac{a_{k-1}}{k^2-1}$. En sommant, membre à membre, ces relations et après simplification des termes communs, il vient :

$$a_{n+1} = a_2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{k-1}}{k^2-1}$$

$$\leqslant 100 + \sum_{k=2}^{n} \frac{400}{k^2-1}, \text{ d'après l'hypothèse de récurrence et l'énoncé}$$

$$= 100 + 200\sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1})$$

$$= 100 + 200(1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) \text{ après simplification par dominos}$$

$$= 400 - \tfrac{200}{n} - \tfrac{200}{n+1},$$

et donc $a_{n+1} \leqslant 400$, ce qui achève la récurrence.

Exercice 6. Déterminer la plus grande valeur possible et la plus petite valeur possible de

$$\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2}$$

lorsque a, b, c sont des réels strictement positifs vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, on note que si l'on veut que l'expression ait un sens, il faut $a, b, c \in [0; 2]$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2})^2 \leqslant 3(4 - a^2 + 4 - b^2 + 4 - c^2) = 18,$$

c.à.d. $\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2} \leqslant 3\sqrt{2}$, avec égalité pour $a = b = c = \sqrt{2}$.

Ainsi, la plus grande valeur possible est $3\sqrt{2}$.

Cherchons maintenant la valeur minimale :

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a \leqslant b \leqslant c$.
De $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, on déduit alors que $3a^2 \leqslant 6$, soit donc $0 \leqslant a^2 \leqslant 2$.

D'autre part, si $x, y \geqslant 0$, on a clairement $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x+y}$, avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$.
Il vient alors
$\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2} \geqslant \sqrt{4-a^2} + \sqrt{8-b^2-c^2} = \sqrt{4-a^2} + \sqrt{2+a^2}$,

et, puisque $0 \leqslant 4-c^2 \leqslant 4-b^2$, égalité a lieu si et seulement si $4-c^2=0$, c.à d. $c=2$.

Il reste donc à trouver le minimum de l'expression $f(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{2+x}$, lorsque $x \in [0;2]$.
Or, puisque tout est positif, cela revient à trouver le minimum de
$(f(x))^2 = 6+2\sqrt{(4-x)(2+x)}$, sous les mêmes conditions.

Comme $(4-x)(2+x) = -x^2+2x+8 = 9-(x-1)^2$, la valeur minimale de $\sqrt{(4-x)(2+x)}$ est $\sqrt{8}$, avec égalité pour $x=0$.
Ainsi, on a $(f(x))^2 \geqslant 6+2\sqrt{8} = (2+\sqrt{2})^2$, ou encore $f(x) \geqslant 2+\sqrt{2}$, avec égalité pour $x=0$.

Par suite, on a $\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2} \geqslant 2+\sqrt{2}$, avec égalité en particulier pour $(a,b,c) = (0,\sqrt{2},2)$.
Cela assure que la plus petite valeur cherchée est $2+\sqrt{2}$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ qui vérifient les trois conditions suivantes pour tous réels x et y :
i) $f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x)$,
ii) $f(-x) = f(x-1)$,
iii) si $1 < x < y$ alors $f(x) < f(y)$.

Solution de l'exercice 7 Nous allons prouver que la seule solution est $f : x \longrightarrow x^2+x+1$.

Soit f une solution éventuelle du problème.
De i), pour $x=0$, on déduit que $f(0)=f^2(0)$. Et, comme $f(0)>0$, on a donc $f(0)=1$.

Soit x un réel. En utilisant i) pour les valeurs x et $-x$, il vient
$f(x)^2 - 2xf(x) = f(x^2) = f(-x)^2 + 2xf(-x)$,
ou encore $(f(x)-f(-x))(f(x)+f(-x)) = 2x(f(x)+f(-x))$.
Puisque f est à valeurs strictement positives, on a $f(x)+f(-x) \neq 0$,
et donc $f(x)-f(-x) = 2x$.
Finalement, et d'après ii), on a

$$f(x) = f(x-1)+2x, \text{ pour tout réel } x. \ (1)$$

En particulier, on déduit facilement de (1) que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$f(n) = f(0) + 2(n+(n-1)+\cdots+1) = n^2+n+1.$$

De ii), on obtient alors que

$$f(n) = n^2+n+1 \text{ pour tout entier } n.$$

Soit x un réel et $n \geqslant 0$ un entier.
Pour tout entier k, on a $f(x+k) = 2x+2k+f(x+k-1)$.
Après sommation membre à membre de toutes ces relations pour $k=0,1,\cdots,n$, et simplification des termes communs, il vient
$f(x+n) = 2nx + 2(n+(n-1)+\cdots+1) + f(x)$.

Et ainsi :

$$f(x+n) = f(x) + 2nx + n^2 + n, \text{ pour tout réel } x \text{ et tout entier } n \geqslant 0. \ (2)$$

Cela va nous permettre de conclure sur les rationnels positifs :
Soit $x = \frac{m}{n}$, avec $m, n > 0$ entiers.
D'après (2), on a

$$\begin{aligned} f((x+n)^2) &= f(x^2 + 2m + n^2) \\ &= f(x^2) + 2(2m+n^2)x^2 + (2m+n^2)^2 + 2m + n^2 \\ &= f^2(x) - 2xf(x) + 2(2m+n^2)x^2 + (2m+n^2)^2 + 2m + n^2. \end{aligned}$$

Mais, d'après i) et (2), on a également

$$\begin{aligned} f((x+n)^2) &= f^2(x+n) + 2(x+n)f(x+n) \\ &= (f(x) + 2m + n^2 + n)^2 - 2(x+n)(f(x) + 2m + n^2 + n). \end{aligned}$$

En identifiant les deux dernières expressions de $f((x+n)^2)$, et après un calcul passionnant, on obtient que

$$f(x) = x^2 + x + 1, \text{ pour tout rationnel } x > 0.$$

Soit $x > 1$ un réel.
On sait qu'il existe deux suites de rationnels positifs, (u_n) et (v_n), qui convergent vers x et telles que $u_n \leqslant w \leqslant v_n$ pour tout entier n.
Or, d'après iii), la fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$ donc, pour tout entier n, on a $f(u_n) < f(x) < f(v_n)$,
ou encore $u_n^2 + u_n + 1 < f(x) < v_n^2 + v_n + 1$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, et d'après le théorème des gendarmes, il vient alors $f(x) = x^2 + x + 1$.

$$\text{Ainsi, on a } f(x) = x^2 + x + 1, \text{ pour tout réel } x > 1. \ (3)$$

Donnons maintenant le coup de grâce.
Soit x un réel.
On choisit un entier $n > 0$ tel que $x + n > 1$.
De (2) et (3), on déduit que
$f(x+n) = (x+n)^2 + (x+n) + 1$ et $f(x+n) = f(x) + 2nx + n^2 + n$.
En identifiant ces deux expressions, et après encore quelques calculs, il vient $f(x) = x^2 + x + 1$.

Et finalement, on a $f(x) = x^2 + x + 1$, pour tout réel x.

Ce n'est que routine que de vérifier que cette fonction est bien une solution du problème.

Exercice 8. Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels, de degrés $n \geqslant 0$. On suppose que le coefficient de x^n de chacun de ces deux polynômes est égal à 1 et que, pour tout réel x, on a $P(P(x)) = Q(Q(x))$.
Prouver que $P = Q$.

Solution de l'exercice 8 Le résultat est évident si $n = 0$. Dans ce qui suit, on suppose donc que $n \geqslant 1$.

Par l'absurde : supposons que le polynôme $R = P - Q$ ne soit pas le polynôme nul.
Soit k le degré de R.
Puisque P et Q sont tous deux de degré n, et de même coefficient dominant, on a $k \in \{0, \cdots, n-1\}$. De plus, on a

$$P(P(x)) - Q(Q(x)) = [Q(P(x)) - Q(Q(x))] + R(P(x)). \ (1)$$

Posons $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
On remarque qu'alors

$$Q(P(x)) - Q(Q(x)) = [P^n(x) - Q^n(x)] + a_{n-1}[P^{n-1}(x) - Q^{n-1}(x)] + \cdots + a_1[P(x) - Q(x)],$$

et chacun des termes de cette somme autre que $[P^n(x) - Q^n(x)]$ est de degré au plus $n(n-1)$. D'autre part, on a

$$[P^n(x) - Q^n(x)] = R(x)[P^{n-1}(x) + P^{n-2}(x)Q(x) + \cdots + Q^{n-1}(x)],$$

ce qui assure que $[P^n(x) - Q^n(x)]$ est de degré $n(n-1) + k$ et de coefficient dominant égal à n (on rappelle que P et Q sont tous les deux de coefficient dominant égal à 1).

- On suppose que $k > 0$.
Alors, le polynôme $Q(P(x)) - Q(Q(x))$ est de degré $n(n-1) + k$.
D'autre part, le degré de $R(P(x))$ est kn, et on a $kn \leqslant n(n-1) < n(n-1) + k$.
De (1), on déduit que $P(P(x)) - Q(Q(x))$ est de degré $n(n-1) + k$, et donc non nul, en contradiction avec l'énoncé.

- Il reste à étudier le cas où $k = 0$, c'est-à-dire lorsque R est constant.
Notons c cette constante. Notre hypothèse initiale assure que $c \neq 0$.
De $P(P(x)) = Q(Q(x))$, il vient $Q(Q(x) + c) = Q(Q(x)) - c$.
Puisque Q n'est pas constant, c'est donc que l'égalité $Q(y + c) = Q(y) - c$ est vraie pour une infinité de réels y. S'agissant de polynômes, c'est donc qu'elle est vraie pour tout réel y.

Une récurrence immédiate conduit alors à $Q(jc) = a_0 - jc$ pour tout entier $j \geqslant 0$.
Comme ci-dessus, l'égalité $Q(x) = -x + a_0$ étant vraie pour une infinité de valeurs (puisque $c \neq 0$), elle est donc vraie pour tout x. Cela contredit que Q est de coefficient dominant égal à 1.

Ainsi, dans tous les cas, on a obtenu une contradiction. Cela assure que R est bien le polynôme nul, et achève la démonstration.

Autre solution.

Le résultat est facile à montrer si $n = 0$ ou $n = 1$. Dans ce qui suit, on suppose donc que $n \geqslant 2$. Notons $R = P - Q$ et supposons par l'absurde qu'il est non nul. Quitte à permuter les rôles de P et de Q, on peut supposer que le coefficient dominant de R est strictement positif.

Lemme 1. *Pour tout polynôme R ayant un coefficient dominant strictement positif, il existe un réel a tel que pour tout $x \geqslant a$ on a $R(x) > 0$.*

En effet, $R(x)$ peut s'écrire sous la forme $cx^m(1 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_m}{x^m})$ avec $c > 0$. Le terme entre parenthèses tend vers 1 lorsque $x \to +\infty$, donc est strictement positif pour x assez grand.

Lemme 2. *Pour tout polynôme P de degré $\geqslant 1$ ayant un coefficient dominant strictement positif, il existe a tel que P est strictement croissant sur $[a, +\infty[$.*

En effet, le polynôme dérivé P' vérifie les conditions du lemme 1 donc $P'(x)$ est strictement positif pour x assez grand.

Revenons à l'exercice. D'après les deux lemmes précédents, il existe a tel que sur $[a, +\infty[$, P et Q sont strictement croissants, et R et $R \circ Q$ sont strictement positifs.
On a alors pour tout $x \geqslant a$:

$$\begin{aligned} P(P(x)) &> P(Q(x)) \qquad \text{puisque } P(x) > Q(x) \\ &= Q(Q(x)) + R(Q(x)) \\ &> Q(Q(x)), \end{aligned}$$

ce qui contredit $P(P(x)) = Q(Q(x))$.

Exercice 9. Soit $n > 0$ un entier et $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. Prouver que :

$$\max_{x_1>0,\cdots,x_n>0} \min(x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, \cdots, \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}) =$$

$$\min_{x_1>0,\cdots,x_n>0} \max(x_1, \frac{1}{x_1} + x_2, \cdots, \frac{1}{x_{n-1}} + x_n, \frac{1}{x_n}) = 2\cos(\frac{\pi}{n+2}).$$

Solution de l'exercice 9 Soit U l'ensemble des n-uplets de réels strictement positifs.
Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in U$, on pose

$$\begin{gathered} m(x) = \min(x_1, \tfrac{1}{x_1} + x_2, \cdots, \tfrac{1}{x_{n-1}} + x_n, \tfrac{1}{x_n}) \\ \text{et } M(x) = \max(x_1, \tfrac{1}{x_1} + x_2, \cdots, \tfrac{1}{x_{n-1}} + x_n, \tfrac{1}{x_n}) \end{gathered}$$

Notre stratégie va consister à prouver qu'il existe $a \in U$ tel que $m(a) = M(a)$ et que, pour tout $x \in U$, on a $m(x) \leqslant m(a)$ et $M(a) \leqslant M(x)$.

Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$.
La condition $m(a) = M(a)$ s'écrit

$$a_1 = \tfrac{1}{a_1} + a_2 = \cdots = \tfrac{1}{a_{n-1}} + a_n = \tfrac{1}{a_n}. \ (1)$$

Mais, admettons pour le moment que l'on ait déjà trouvé $a \in U$ tel que $m(a) = M(a)$.

Par l'absurde : On suppose qu'il existe $x \in U$ tel que $m(x) > m(a)$.

On prouve alors par récurrence sur k que $x_k > a_k$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$:

Déjà, on a $x_1 \geqslant m(x) > m(a) = a_1$.

D'autre part, si $x_k > a_k$ pour un certain $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, alors

$$\frac{1}{x_k} + x_{k+1} \geqslant m(x) > m(a) = \frac{1}{a_k} + a_{k+1}.$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\frac{1}{x_k} < \frac{1}{a_k}$, d'où $x_{k+1} > a_{k+1}$, ce qui achève la récurrence.

En particulier, on a donc $x_n > a_n$.
Mais, $\frac{1}{x_n} \geqslant m(x) > m(a) = \frac{1}{a_n}$, d'où $x_n < a_n$. Contradiction.

Ainsi, pour tout $x \in U$, on a $m(x) \leqslant m(a)$.
On démontre de même que $M(a) \leqslant M(x)$, pour tout $x \in U$.

Dans ces conditions, on a $\max\limits_{x \in U}\{m(x)\} = m(a) = M(a) = \min\limits_{x \in U}\{M(x)\}$, comme désiré.

Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à trouver $a \in U$ vérifiant (1).

Montrons comment trouver un tel a sans trop s'aider de l'énoncé :
Supposons qu'un tel a existe. On note $\alpha > 0$ la valeur commune dans (1).

On vérifie sans difficulté qu'alors, pour tout k, on a $a_k = \frac{b_k}{b_{k-1}}$,
où $b_0 = 1, b_1 = \alpha$, et $b_j = \alpha b_{j-1} - b_{j-2}$ pour $j \geqslant 2$. (2)

Comme $\alpha = \frac{1}{a_n}$, on doit avoir $b_{n-1} = \alpha b_n$, ce qui signifie que $b_{n+1} = 0$.

Revenons sur α. En fait, on a même $\alpha < 2$:
En effet, supposons que $\alpha \geqslant 2$. Alors, $a_1 = \alpha \geqslant 2$ et, par une récurrence sans difficulté, on déduit que $a_k = \alpha - \frac{1}{a_{k-1}} \geqslant 1 + \frac{1}{k}$.
En particulier, on a $a_n \geqslant 1 + \frac{1}{n} > 1$ et $a_n = \frac{1}{\alpha} < 1$, contradiction.

On peut donc poser $\alpha = 2\cos(t)$ où $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Compte-tenu de la formule bien connue

$$2\cos(a)\sin(b) = \sin(b+a) + \sin(b-a),$$

une autre récurrence sans difficulté à partir de (2) conduit alors à

$$b_k = \frac{\sin((k+1)t)}{\sin(t)} \text{ pour tout } k \geqslant 0.$$

La condition $b_{n+1} = 0$ impose alors $t = \frac{\pi}{n+2}$. Ainsi, on a $\alpha = 2\cos(\frac{\pi}{n+2})$ et $a = (a_1, \cdots, a_n)$ où $a_k = \dfrac{\sin(\frac{(k+1)\pi}{n+2})}{\sin(\frac{k\pi}{n+2})}$.

Réciproquement, on vérifie aisément que, dans ces conditions, la chaîne d'égalités (1) est vraie.

Fin