Olympiades Françaises de Mathématiques 2013-2014

OFM

Olympiades Françaises Mathématiques

Envoi Numéro 2

À renvoyer au plus tard le vendredi 13 décembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 1999 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2012-2013 sont dans le groupe A.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B »ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. On dit qu'un nombre à 9 chiffres est *intéressant* si chaque chiffre de 1 à 9 y apparaît une unique fois, que les chiffres de 1 à 5 y apparaissent dans l'ordre mais pas les chiffres de 1 à 6, par exemple 189236457.
Combien y a-t-il de nombres intéressants ?

Exercice 2. Dans un pays, il y a n villes. Deux villes quelconques sont toujours reliées soit par une autoroute, soit par une ligne de train.
Montrer qu'un des deux moyens de transport permet de relier n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

Remarque. Autrement dit, l'énoncé demande de montrer que soit on peut se rendre de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre en voiture, soit on peut se rendre de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre en train, soit éventuellement les deux.

Exercice 3. 2014 scientifiques participent à un congrès, chaque scientifique étant soit un mathématicien, soit un physicien. Bien sûr, les physiciens mentent toujours et les mathématiciens disent toujours la vérité, sauf quand ils se trompent. Lors du dîner final, tous sont assis en rond autour d'une table, et chacun prétend se trouver entre un mathématicien et un physicien. Il se trouve qu'exactement un mathématicien distrait s'est trompé.
Combien y a-t-il de physiciens au congrès ?

Exercices Communs

Exercice 4. Montrer que tout polyèdre a deux faces qui ont le même nombre de sommets.

Exercice 5. Sur un échiquier 5 sur 5, on a placé sur des cases différentes k cavaliers, de telle manière que chacun peut en prendre exactement 2 autres.
Quelle est la plus grande valeur possible de k ?

Exercice 6. Soit $n \geqslant 5$ un entier. Montrer qu'il est possible de partitionner $\{1, 2, ..., n\}$ en deux sous-ensembles A et B tels que la somme des éléments de A soit égale au produit des éléments de B.

Remarque. On rappelle que A et B forment une partition d'un ensemble E si leur réunion est E et leur intersection est vide.

Exercices du groupe A

Exercice 7. On se donne n points du plan, tels que trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés. Chacun est colorié en rouge ou en bleu. On suppose qu'il y a exactement un point bleu à l'intérieur de chaque triangle dont les sommets sont rouges, et exactement un point rouge à l'intérieur de chaque triangle dont les sommets sont bleus.
Quelle est la plus grande valeur possible de n ?

Exercice 8. La ville de Gotham City est un grand rectangle, découpé en pâtés de maisons rectangulaires plus petits par des rues parallèles aux bords de la ville. On suppose qu'il y a au moins une rue, et qu'aucune rue ne traverse la ville de part en part.
Montrer qu'il existe un pâté de maisons qui ne touche pas le bord de la ville.

Exercice 9. Soient E un ensemble de cardinal n et $\mathscr{F}$ un ensemble de parties de E avec $|\mathscr{F}| = 2^{n-1}$ tel que pour tous A, B et C dans $\mathscr{F}$, $A \cap B \cap C$ est non vide.
Montrer que l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{F}$ est non vide.

Fin