OFM 2013-2014 : solutions de l'Envoi 2

Exercices groupe B

Exercice 1 On dit qu'un nombre à 9 chiffres est *intéressant* si chaque chiffre de 1 à 9 y apparaît une unique fois, que les chiffres de 1 à 5 y apparaissent dans l'ordre mais pas les chiffres de 1 à 6, par exemple 189236457.

Combien y a-t-il de nombres intéressants ?

Solution de l'exercice 1 Pour construire un nombre intéressant, on peut placer d'abord les chiffres de 1 à 5, puis intercaler le 6 quelque part, puis le 7, le 8 et le 9. L'ordre des chiffres de 1 à 5 est imposé. Ensuite, le 6 peut être placé n'importe où sauf après le 5 car les chiffres de 1 à 6 ne sont pas dans l'ordre. Il y a donc 5 manières de placer le 6. Ensuite, on peut placer le 7 n'importe où, donc il y a 7 manières de le placer, et de même 8 manières de placer le 8 et 9 pour le 9.

Il y a donc $5 * 7 * 8 * 9 = 2520$ nombres intéressants.

Exercice 2 Dans un pays, il y a n villes. Deux villes quelconques sont toujours reliées soit par une autoroute, soit par une ligne de train. Montrer qu'un des deux moyens de transport permet de relier n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

Solution de l'exercice 2 On raisonne par récurrence sur n : pour $n = 1$ ou $n = 2$, le résultat est immédiat. Supposons qu'on l'a montré au rang n, et considérons $n + 1$ villes :

On isole une des villes, appelons-la par exemple Paris. Alors un des deux moyens de transports permet de relier entre elles toutes les villes sauf Paris. Supposons que c'est la voiture :

— si Paris est relié à une ville par une autoroute par exemple Lyon, on peut en voiture aller de Paris à Lyon, puis à n'importe quelle autre ville d'après l'hypothèse de récurrence.

— sinon, Paris est relié à toutes les villes par une ligne de train, donc on peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle ville en train en passant par Paris.

Exercice 3 2014 scientifiques participent à un congrès, chaque scientifique étant soit un mathématicien, soit un physicien. Bien sûr, les physiciens mentent toujours et les mathématiciens disent toujours la vérité, sauf quand ils se trompent. Lors du dîner final, tous sont assis en rond autour d'une table, et chacun prétend se trouver entre un mathématicien et un physicien. Il se trouve qu'exactement un mathématicien distrait s'est trompé. Combien y a-t-il de physiciens au congrès ?

Solution de l'exercice 3 Si 2 physiciens sont assis côté à côté, comme ils ont menti, ils ne sont pas entre un physicien et un mathématicien, donc chacun est entre deux physiciens, et ainsi de suite, donc le congrès n'accueille que des physiciens, ce qui est absurde car il y a au moins un mathématicien (celui qui s'est trompé...). Chaque physicien est donc entre deux mathématiciens.

D'autre part, chaque mathématicien est entre un mathématicien et un physicien, sauf celui qui s'est trompé. Appelons-le Thomas : si Thomas est entre deux physiciens, alors on a partout ailleurs une alternance de deux mathématiciens, un physicien... Mais alors, si il y a k paires de mathématiciens côte à côte, il y a $2k + 1$ mathématiciens et $k + 1$ physiciens, donc $3k + 2$ scientifiques, ce qui est absurde car $3k + 2 \neq 2014$.

Thomas est donc entre deux mathématiciens, donc on a trois mathématiciens côté à côte, et les autres par paires. Si il y a k paires, alors on a $2k+3$ mathématiciens et $k+1$ physiciens donc $3k+4=2014$ donc $k=670$ et il y a 671 physiciens.

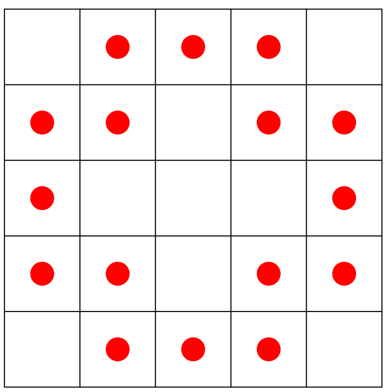
Exercices communs

Exercice 4 Montrer que tout polyèdre a deux faces qui ont le même nombre de sommets.

Solution de l'exercice 4 Soit n le nombre de faces du polyèdre, et soit F une face fixée : les arêtes de F séparent F de faces toutes différentes, donc le nombre d'arêtes de F est inférieur ou égal au nombre de faces autres que F. De plus, F a au moins 3 arêtes. Chaque face a autant d'arêtes que de sommet, donc toute face a un nombre de sommets compris entre 3 et $n-1$, soit $n-3$ possibilités. D'après le principe des tiroirs, il existe donc deux faces qui ont le même nombre de sommets.

Exercice 5 Sur un échiquier 5 sur 5, on a placé sur des cases différentes k cavaliers, de telle manière que chacun peut en prendre exactement 2 autres.

Quelle est la plus grande valeur possible de k ? *Solution de l'exercice 5* La configuration suivante donne un exemple avec 16 cavaliers :



On montre maintenant que c'est optimal : quitte à échanger les couleurs, on peut supposer le centre noir. Notons k le nombre de cavaliers sur une case noire, l le nombre de cavaliers sur une case blanche et N le nombre de manière de choisir deux cavaliers en prise : sur deux tels cavaliers, un est sur une case noire donc il y a k manières de le choisir, puis 2 manières de choisir un cavalier sur une case blanche qu'il peut prendre, donc $N=2k$, mais le même raisonnement donne $N=2l$ donc $k=l$.

Si il y a un cavalier au centre de l'échiquier, il a accès à 8 cases blanches donc au moins 6 cases blanches sont inoccupées donc $l \leqslant 12-6=6$ donc $k+l \leqslant 12$. On peut donc supposer le centre vide.

Si il y a un cavalier sur une case blanche qui touche le centre, il a accès à 6 cases, donc 4 d'entre elles sont inoccupées. Le centre l'est aussi, donc $k \leqslant 13-5=8$ et $k+l \leqslant 16$, ce qu'on veut montrer.

Si enfin le centre et ses voisins immédiats sont inoccupés, alors les coins le sont aussi car il ne peuvent avoir de cavaliers en prise, ce qui ne laisse que les 16 cases de la figure ci-dessus.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il est possible de partitionner $\{1,2,\ldots,n\}$ en deux sous-ensembles A et B tels que la somme des éléments de A soit égale au produit des éléments de B.

Solution de l'exercice 6 A priori, l'ensemble B doit être bien plus petit que A. On va donc chercher un B avec un petit nombre d'éléments. En testant des petites valeurs de n, on peut penser à chercher B sous la forme $\{1, a, b\}$ avec $a, b \neq 1$ et $a \neq b$.

On a alors $\prod_{x \in B} x = ab$, et :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} &= \sum_{x=1}^{n} x - 1 - a - b \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - a - b - 1 \end{aligned}$$

On veut donc $\frac{n(n+1)}{2} = ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$, donc il suffit d'écrire $\frac{n(n+1)}{2}$ comme un produit. Or, si n est pair, on peut prendre $a + 1 = \frac{n}{2}$ et $b + 1 = n + 1$, soit $a = \frac{n}{2} - 1$ et $b = n$. Si n est impair, on prend $a = \frac{n-1}{2}$ et $b = n - 1$. Dans les deux cas, l'hypothèse $n \geqslant 5$ permet de vérifier facilement que 1, a et b sont deux à deux distincts.

Exercice 7 On se donne n points du plan, tels que trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés. Chacun est colorié en rouge ou en bleu. On suppose qu'il y a exactement un point bleu à l'intérieur de chaque triangle dont les sommets sont rouges, et un point rouge à l'intérieur de chaque triangle dont les sommets sont bleus.

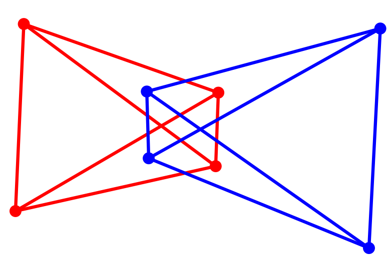
Quelle est la plus grande valeur possible de n ?

Exercices groupe A

Solution de l'exercice 7 On montre d'abord que les points bleus forment un polygone convexe : si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un point bleu à l'intérieur d'un polygone bleu, donc on en découpant ce polygone en triangles, on pourrait trouver un point bleu à l'intérieur d'un triangle bleu. Le grand triangle bleu doit contenir un unique point rouge, mais on peut le découper en trois triangles qui contiennent chacun un unique point rouge, ce qui est absurde.

Les points bleus forment donc un polygone convexe, de même que les rouges. De plus, il y a au maximum 2 points rouges à l'intérieur du polygone bleu, car s'il y en avait 3 ils formeraient un triangle sans point bleu à l'intérieur.

Enfin, si k est le nombre de points bleus, on peut découper le polygone bleu en $k - 2$ triangles, qui chacun doivent contenir un point rouge, donc $k - 2 \leqslant 2$ et $k \leqslant 4$. De même, il y a au plus 4 points rouges donc $n \leqslant 8$. On peut alors vérifier que la configuration à 8 points suivante convient :

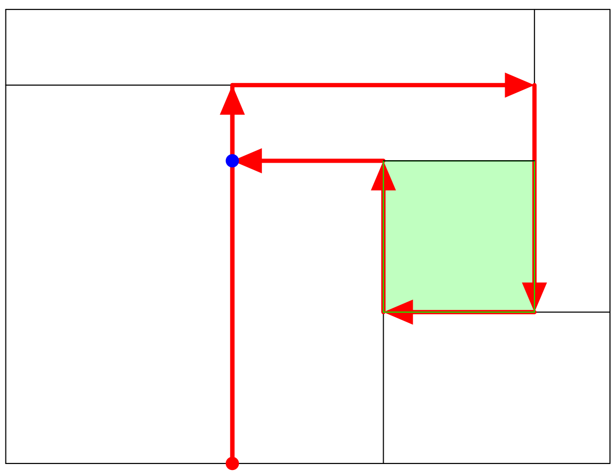


Exercice 8 La ville de Gotham City est un grand rectangle, découpé en pâtés de maisons rectangulaires plus petits par des rues parallèles aux bords de la ville. On suppose qu'il y a au moins une rue, et qu'aucune rue ne traverse la ville de part en part.

Montrer qu'il existe un pâté de maison qui ne touche pas le bord de la ville. <u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Batman explore la ville selon le procédé suivant : il part du bord de la ville (du point rouge sur la figure) et suit jusqu'au bout une rue (l'Avenue du Joker par exemple) qui s'enfonce à l'intérieur. Comme l'Avenue de Joker ne traverse pas la ville de part en part, elle débouche sur une autre (appelons-la Boulevard Double-Face). Mais le Boulevard Double-Face ne traverse pas non plus Gotham City de part en part, donc va déboucher sur une autre rue soit à gauche, soit à droite, soit éventuellement des deux côtés. Si le Boulevard débouche sur une nouvelle rue à gauche, Batman part vers la gauche. Sinon, il part vers la droite. Il continue ainsi...

Il est alors clair que Batman ne sortira jamais de Gotham. Mais le nombre de rues est fini, donc il finira forcément par passer deux fois par un même point. On suppose par exemple que le premier point où il passe deux fois de suite est la Place Ra's Al Ghul (en bleu sur la figure) : entre ses deux passages, il a fait le tour d'une certaine zone, sans toucher le bord de la ville. Tout pâté de maison dans cette zone convient, comme celui colorié en vert.



Exercice 9 Soient E un ensemble de cardinal n et $\mathscr{F}$ un ensemble de parties de E avec $|\mathscr{F}| = 2^{n-1}$ tel que pour tous A, B et C dans $\mathscr{F}$, $A \cap B \cap C$ est non vide.

Montrer que l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{F}$ est non vide.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Si $A \subset E$, on notera A^c son complémentaire : l'ensemble des parties de E est partitionné en 2^{n-1} doubletons de la forme $\{A, A^c\}$ où $A \subset E$. Or, il est impossible que les deux éléments d'un doubleton soient dans $\mathscr{F}$, car leur intersection est vide, donc $\mathscr{F}$ contient exactement un élément de chaque doubleton.

Soient donc A et B dans $\mathscr{F}$: on va montrer que $A \cap B \in \mathscr{F}$. D'après ce qu'on vient de dire, il suffit de montrer $(A \cap B)^c \notin \mathscr{F}$. Or, ceci est vrai car $A \cap B \cap (A \cap B)^c$ est vide.

Par récurrence sur k, on en déduit que pour tous $A_1, A_2, ..., A_k$ de $\mathscr{F}$, $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \in \mathscr{F}$. En effet, c'est vrai pour $k = 2$ et si on l'a montré pour k, alors :

$$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k = (A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{k-1}) \cap A_k$$

est l'intersection de deux éléments de $\mathscr{F}$, donc est dans $\mathscr{F}$.

Comme $\mathscr{F}$ est fini, l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{F}$ est dans $\mathscr{F}$. Or, l'ensemble vide ne peut pas être dans $\mathscr{F}$ car son intersection avec lui-même est vide, donc l'intersection de tous les éléments de $\mathscr{F}$ n'est pas vide.