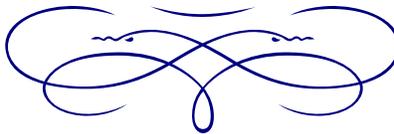


# *Olympiades Françaises de Mathématiques*

*2012-2013*

*Test du vendredi 8 mars*

*Durée : 4h*



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
  - Pour l'exercice de géométrie, faire la figure sur une feuille blanche séparée.
  - Respecter la numérotation des exercices.
- 
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**
- 
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

*Exercice 1.* Soit  $k \geq 2$  un entier.

- 1) Soit  $n > k$  un entier. Existe-t-il  $n$  entiers strictement positifs tels que  $k$  quelconques ne sont jamais premiers entre eux dans leur ensemble, mais  $k + 1$  quelconques sont toujours premiers entre eux dans leur ensemble ?
- 2) Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs vérifiant les deux conditions ci-dessus ?



*Exercice 2.* Soit  $ABC$  un triangle et  $\omega$  un cercle qui passe par  $A$  et  $B$  et recoupe les côtés  $[BC]$  et  $[AC]$  respectivement en  $D$  et  $E$ . Les points  $K$  et  $L$  sont respectivement les centres du cercle inscrit dans  $DAC$  et du cercle inscrit dans  $BEC$ . Soit  $N$  l'intersection des droites  $(EL)$  et  $(DK)$ .

Prouver que le triangle  $KNL$  est isocèle.



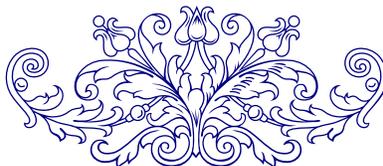
*Exercice 3.* Prouver que, pour tous réels  $a, b, c > 0$  et tout réel  $t \geq 0$ , on a

$$\frac{a}{b+tc} + \frac{b}{c+ta} + \frac{c}{a+tb} \geq \frac{3}{1+t}.$$



*Exercice 4.* Déterminer tous les entiers naturels  $m, n$  et tous les nombres premiers  $p$  tels que

$$m(4m^2 + m + 12) = 3(p^n - 1).$$



*Fin*