Corrigé du test d'entraînement no. 1

Test junior

Exercice 1. Pour tout entier n, notons $x_n = x^n + \dfrac{1}{x^n}$. On calcule immédiatement que $3x_n = x_1 x_n = x_{n+1} + x_{n-1}$, ce qui donne $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$. Compte tenu de $x_0 = 2$ et $x_1 = 3$, on calcule successivement

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 - x_0 = 7 \\ x_3 &= 3x_2 - x_1 = 18 \\ x_4 &= 3x_3 - x_2 = 47 \\ x_5 &= 3x_4 - x_3 = 123 \\ x_6 &= 3x_5 - x_4 = 322 \\ x_7 &= 3x_6 - x_5 = 843 \end{aligned}$$

Exercice 2. Notons $S = 1+2+3+\cdots+2012 = 2012 \times 2013/2 = 1006 \times 2013$. C'est un nombre pair. Comme le fait de changer un signe ne change pas la parité, les entiers de la forme $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2012$ sont des entiers pairs compris entre $-S$ et S.

Réciproquement, montrons que si a est un entier pair compris entre $-S$ et S alors il peut s'écrire sous la forme $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2012$. Si $a = -S$ c'est évident, supposons donc $a > -S$. Il existe un entier b tel que $0 \leq b < S$ et $a = -S + 2b$. Soit k le plus petit entier tel que $b \leq \displaystyle\sum_{j=k}^{2012} j$. On a

$$\sum_{j=k-1}^{2012} j < b \leq \sum_{j=k}^{2012} j$$

donc il existe un entier $\ell \in [1, k-1]$ tel que $b = \ell + \displaystyle\sum_{j=k}^{2012} j$.

En multipliant cette égalité par 2 puis en retranchant S, on obtient

$$a = -1 - 2 \cdots - (\ell - 1) + \ell - (\ell + 1) - (\ell + 2) - \cdots - (k-1) + k + (k+1) + (k+2) + \cdots + 2012.$$

Conclusion : il y a exactement $\dfrac{2012 \times 2013}{2} + 1$ nombres pouvant s'écrire sous la forme $\pm 1 \pm 2 \pm \cdots \pm 2012$.

Autre méthode.

On part d'une suite $(-, -, \ldots, -)$ de 2012 signes "moins". On introduit un $+$, et on le décale vers la droite :
$(+, -, -, \ldots, -, -)$
$(-, +, -, \ldots, -, -)$
$(-, -, +, \ldots, -, -)$
$\cdots$
$(-, -, -, \ldots, -, +)$.
Puis on introduit un deuxième signe $+$, et on recommence le même procédé :
$(+, -, -, \ldots, -, -, +)$
$\cdots$

$(-, -, -, \dots, -, +, +)$
et ainsi de suite jusqu'à atteindre $(+, +, \dots, +)$.

A chaque étape, la somme correspondante augmente de 2 puisque dans la somme il existe k tel que l'opération consiste à remplacer $+k - (k+1)$ par $-k + (k+1)$. La première somme est $-S$, la dernière est S, donc on a ainsi atteint tous les nombres pairs compris entre $-S$ et S.

Exercice 3. Soit n le plus grand entier tel qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ comme dans l'énoncé. Par maximalité de n, l'un des a_i est égal à 1. Quitte à réindexer la suite on peut supposer que $a_1 = 1$.

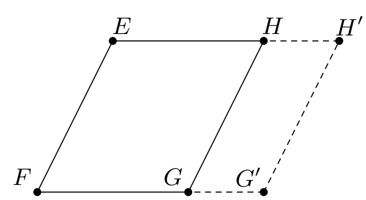
Pour tout $k > 1$, a_k est plus petit que 100 et n'est pas premier donc il possède un facteur premier p_k plus petit que 10. Les p_k sont deux à deux distincts puisque les a_k sont premiers entre eux. Comme il n'y a que quatre nombres premiers plus petits que 10 (à savoir $2, 3, 5, 7$), on a $n - 1 \leq 4$ donc $n \leq 5$.

Réciproquement, pour $n = 5$ on a une solution avec la suite $1, 4, 9, 25, 49$.

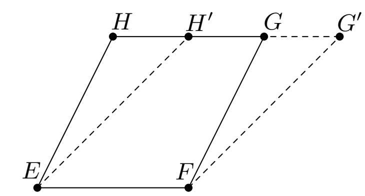
Conclusion : le plus grand entier n vérifiant les conditions de l'énoncé est 5.

Exercice 4. Notons ABC le triangle. Pour tout parallélogramme $EFGH$, considérons les opérations suivantes :

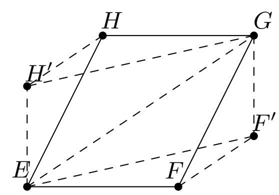
(OP1) Remplacer G et H par G' et H' tels que $GG'H'H$ est un parallélogramme adjacent à $EFGH$;



(OP2) Translater G et H d'un même vecteur de direction (GH) ;



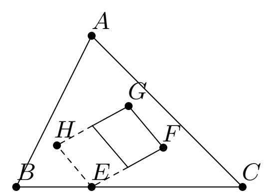
(OP3) Translater H d'un vecteur de direction $\overrightarrow{EG}$ et translater F d'un vecteur opposé.



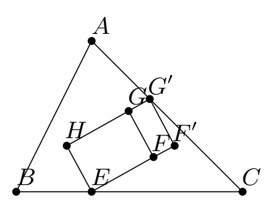
Il est facile de voir que (OP1) augmente l'aire tandis que (OP2) et (OP3) conservent l'aire.

Partons d'un parallélogramme situé à l'intérieur de ABC. On va lui appliquer une série de transformations qui laissent l'aire constante ou bien l'augmentent.

S'il ne touche pas le bord, on peut le translater de sorte qu'un des sommets (disons E) touche le bord.

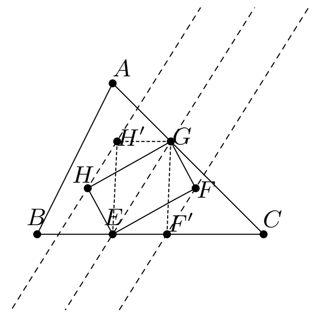


Puis, en appliquant (OP1) on se ramène à ce qu'un autre sommet touche le bord. Si cet autre sommet n'est pas diamétralement opposé à E on applique encore une transformation de type (OP1) de sorte que deux sommets diamétralement opposés du parallélogramme touchent le bord.

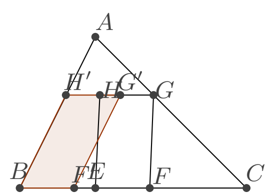


Supposons par exemple que $E \in [B, C]$ et $G \in [C, A]$. Les points A et B sont dans un même demi-plan délimité par la droite (EG). On note H le sommet du parallélogramme qui est dans ce demi-plan et F le dernier sommet.

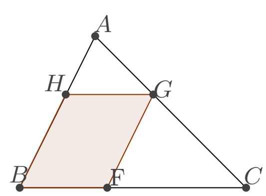
Au moins l'une des demi-droites passant par H et parallèles à (EG) ne traverse pas la droite $[A, B]$. On déplace H le long de cette demi-droite et on déplace F suivant la même direction mais en sens opposé, à la même vitesse, jusqu'à ce que l'un des deux points F ou H atteigne $[B, C]$ ou $[C, A]$. Supposons par exemple qu'il s'agisse de $[B, C]$.



En appliquant des opérations de type (OP3), on se ramène au cas où $E = B$, $F \in [B, C]$ et $H \in [A, B]$.



Puis, en appliquant (OP1) on amène G sur le segment $[A, C]$.



Le théorème de Thalès donne
$$\frac{BF}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{AH}{BH} = 1 - \frac{BH}{AB}.$$
Complétons ABC en un parallélogramme $ABCD$. On a
$$S(EFGH) = \frac{BF}{BC} \times \frac{BH}{BA} \times S(ABCD) = 2x(1-x)$$
où $x = \dfrac{BF}{BC}$. Comme $x(1-x) = x - x^2 = \dfrac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \dfrac{1}{4}$, l'aire de $EFGH$ est plus petite que $\dfrac{1}{2}$ avec égalité lorsque $E = B$, F est le milieu de $[B, C]$ et H est le milieu de $[A, B]$.

Conclusion : l'aire maximale d'un parallélogramme à l'intérieur de ABC est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Test olympique

Exercice 5. Montrons d'abord le résultat préliminaire suivant.

Soit $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$ on a $g(x+y) = g(x) + g(y)$. Alors il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

En effet, en prenant $x = y = 0$ on a d'abord $g(0) = 0$. Ensuite, en prenant $y = nx$ ($n \in \mathbb{N}$) on obtient $g(nx + x) = g(nx) + g(x)$, ce qui permet par une récurrence immédiate de voir que $g(nx) = ng(x)$. On en déduit que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n \neq 0$,

$$g\Big(\frac{m}{n}\Big) = \frac{1}{n}\Big(ng\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big) = \frac{1}{n}g\Big(n\frac{m}{n}\Big) = \frac{1}{n}g(m) = \frac{1}{n}mg(1) = a\frac{m}{n}$$

où $a = g(1)$.

On en déduit que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_+$.

Si maintenant $x \in \mathbb{Q}_-$, d'après ce qui précède on a $g(-x) = a(-x) = -ax$, donc $0 = g(0) = g(x + (-x)) = g(x) + g(-x) = g(x) - ax$, et donc on a bien $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

Revenons à l'exercice. En prenant $y = -f(z)$ dans l'équation fonctionnelle, on trouve

$$f(x + f(0)) = f(x+z) - f(z). \tag{1}$$

Ceci montre que, pour x fixé, la fonction $z \mapsto f(x+z) - f(z)$ est constante. Elle est égale à sa valeur en $z = 0$ qui est $f(x) - f(0)$:

$$f(x+z) - f(z) = f(x) - f(0).$$

Posons $g(x) = f(x) - f(0)$. On a pour tous $x, z \in \mathbb{Q}$

$$g(x+z)-g(z) = (f(x+z)-f(0))-(f(z)-f(0)) = f(x+z)-f(z) = f(x)-f(0) = g(x).$$

D'après le préliminaire, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que $g(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$, donc $f(x) = ax + b$ où $b = f(0)$.

On reporte l'expression de f dans l'équation (1) pour $x = z = 0$, ce qui donne $ab + b = 0$, donc $b = 0$ ou $a = -1$.

<u>Premier cas</u> : $b = 0$. L'équation fonctionnelle devient

$$a(x + (a + (y + az)) = y + a(x+z),$$

ce qui se simplifie en $a^2y + a^3z = y + az$. En prenant $y = 1$ et $z = 0$ on obtient la condition nécessaire $a \in \{-1, 1\}$. Réciproquement, si $a \in \{-1, 1\}$ alors $a^2 = 1$ et $a^3 = 3$ donc l'équation fonctionnelle est vérifiée.

Dans le premier cas on trouve donc les solutions $f(x) = x$ et $f(x) = -x$.

<u>Deuxième cas</u> : $a = -1$. On a alors $f(x) = b - x$ et on vérifie immédiatement que $f(x + f(y + f(z))) = b - (x + b - (y + b - z)) = b - x + y - z = y + f(x+z)$.

<u>Conclusion</u> : les solutions de l'équation fonctionnelle sont $x \mapsto x$ et $x \mapsto b - x$ pour un certain $b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 6. Notons $A_1, \ldots, A_8$ les sommets de l'octogone parcourus dans le sens direct.

Il existe un parallélogramme du pavage P_1 dont l'un des côtés est inclus dans $[A_1, A_2]$. De même, si P_1 n'est pas adjacent à $[A_5, A_6]$ alors le côté opposé de P_1 est adjacent à un autre parallélogramme du pavage P_2, etc. On construit ainsi une suite $P_1, P_2, \ldots, P_k$ de parallélogrammes du pavage tels que pour tout i, P_i

et P_{i+1} ont des côtés adjacents qui sont parallèles à (A_1A_2), et P_k est adjacent à $[A_5, A_6]$.

De même, il existe une suite $Q_1, \ldots, Q_\ell$ de parallélogrammes du pavage tels que pour tout j, Q_j et Q_{j+1} ont des côtés adjacents qui sont parallèles à (A_3A_4), Q_1 est adjacent à $[A_3, A_4]$ et Q_ℓ est adjacent à $[A_7, A_8]$.

La suite de parallélogrammes $(P_1, \ldots, P_k)$ divise l'octogone en deux zones telles que Q_1 et Q_ℓ appartiennent à deux zones différentes. Par conséquent, il existe i et j tels que $P_i = Q_j$. Alors P_i est un rectangle du pavage dont les côtés sont parallèles à (A_1A_2) et à (A_3A_4). De même il y a un rectangle du pavage dont les côtés sont parallèles à (A_2A_3) et à (A_4A_5), et ces deux rectangles sont distincts puisqu'ils n'ont pas la même direction.

Exercice 7. Soit k un entier possédant cette propriété.

Pour $k = p+1$, on a $k^n - 1 = (p+1)^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0\,[p]$, donc $(p+1)^n - 1 \equiv 0\,[p^2]$. Or,

$$(1+p)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}p + \binom{n}{2}p^2 + \cdots \binom{n}{n}p^n \equiv 1 + np\,[p^2],$$

donc $1 + np \equiv 1\,[p^2]$. Il vient : $p^2 \mid (1+np) - 1 = np$, donc $p \mid n$.

Réciproquement, supposons $p \mid n$. Il existe un entier m tel que $n = pm$. Soit k un entier tel que $k^n - 1$ est divisible par p. Comme $k^n = (k^m)^p$, d'après le petit théorème de Fermat on a $k^n \equiv k^m\,[p]$ donc $k^m - 1$ est divisible par p. Soit ℓ un entier tel que $k^m = 1 + p\ell$. On a

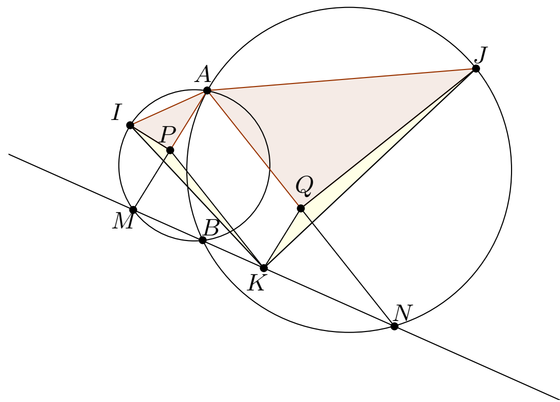
$$\begin{aligned} k^n &= (1+\ell p)^p \\ &= \binom{p}{0} + \binom{p}{1}\ell p + \binom{p}{2}(\ell p)^2 + \cdots \binom{p}{p}(\ell p)^n \\ &= 1 + \ell p^2 + \binom{p}{2}(\ell p)^2 + \cdots \equiv 1\,[p^2], \end{aligned}$$

donc $k^n - 1$ est divisible par p^2.

Conclusion : les entiers qui vérifient la propriété sont les multiples de p.

Exercice 8. On appelle P et Q les milieux respectifs de $[AM]$ et $[AN]$. Le point K étant le milieu de $[MN]$, on a immédiatement le parallélisme des droites (KP) et (AN) d'une part, (KQ) et (AM) d'autre part, ainsi que les égalités

$$KP = AQ \text{ et } KQ = AP. \tag{2}$$



Les points I et J étant les milieux des arcs AM et AN, les droites (IP) et (JQ) sont les médiatrices respectives de $[AM]$ et $[AN]$. Ainsi, (IP) et (KQ) d'une part, (JQ) et (KP) d'autre part, sont perpendiculaires, et donc

$$\widehat{IPK} = \widehat{KQJ}. \tag{3}$$

D'autre part, (BI) et (BJ) sont les bissectrices intérieures et extérieures de $\widehat{MBA}$ donc elles sont perpendiculaires et

$$\widehat{IBA} + \widehat{JBA} = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Par ailleurs, les points A, B, M, I d'une part, A, B, N, J d'autre part, étant cocycliques avec I et J milieux des arcs adéquats, on a $\widehat{IAP} = \widehat{IAM} = \widehat{IBM} = \widehat{IBA}$ et donc

$$\begin{aligned}\widehat{JAQ} &= \widehat{JAN} = \widehat{JBN} = \widehat{JBA} \\ &= \frac{\pi}{2} - \widehat{IBA} \quad \text{d'après (4)} \\ &= \frac{\pi}{2} - \widehat{IAP} = \widehat{AIP}.\end{aligned}$$

Les triangles rectangles IPA et AQJ sont donc semblables, et on a $\dfrac{IP}{AP} = \dfrac{AQ}{JQ}$.

D'après (2), il vient alors

$$\frac{IP}{KQ} = \frac{KP}{JQ}. \tag{5}$$

D'après (3) et (5), il apparaît que les deux triangles IPK et KQJ ont un angle égal et les deux côtés adjacents proportionnels, ce qui assure qu'ils sont semblables. Or, deux de leurs côtés étant perpendiculaires entre eux, les troisièmes le sont aussi, ce qui prouve que $\widehat{IKJ}$ est droit et achève la démonstration.

Esquisse d'une autre solution, utilisant une méthode analytique.

Quitte à effectuer une similitude, on peut supposer que

$$\begin{aligned} B &= (0,0) \\ A &= (1,0) \\ I &= (u\cos\alpha, u\sin\alpha) \\ J &= (v\cos\beta, v\sin\beta) = (v\sin\alpha, -v\cos\alpha) \end{aligned}$$

avec $u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} M &= (m\cos 2\alpha, m\sin 2\alpha) \\ N &= (n\cos 2\beta, n\sin 2\beta) = (-n\cos 2\alpha, -n\sin 2\alpha) \end{aligned}$$

pour certains $m, n \in \mathbb{R}$.

On vérifie facilement que les cercles passant par A et B ont des équations de la forme $x^2+y^2-x+\lambda y = 0$. En écrivant que B, A, I et M sont cocycliques, on obtient $u - \cos\alpha + \lambda\sin\alpha = m - \cos 2\alpha + \lambda \sin 2\alpha = 0$. On élimine λ entre ces deux équations. En utilisant que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ et $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, on obtient $m = 2u\cos\alpha - 1$. De même, $n = 2v\cos\beta - 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} K &= ((u\cos\alpha - v\cos\beta)\cos 2\alpha, (u\cos\alpha - v\cos\beta)\sin 2\alpha) \\ &= ((u\cos\alpha - v\sin\alpha)\cos 2\alpha, (u\cos\alpha - v\sin\alpha)\sin 2\alpha) \end{aligned}$$

On calcule en utilisant les formules de duplication des angles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KI} &= (\sin\alpha(-u\sin 2\alpha, -v\cos 2\alpha), \sin\alpha(u\cos 2\alpha - v\sin 2\alpha)) \\ \overrightarrow{KJ} &= (\cos\alpha(u\cos 2\alpha, -v\sin 2\alpha), \cos\alpha(u\sin 2\alpha + v\cos 2\alpha)) \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que le produit scalaire $\overrightarrow{KI} \cdot \overrightarrow{KJ}$ est nul. Nous laissons le calcul au lecteur.