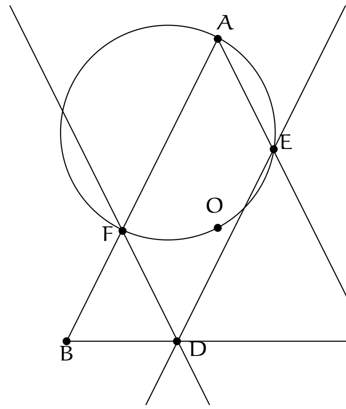
Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Test du mercredi 9 janvier – Corrigé

Exercice 1. Soit ABC un triangle isocèle en A. On note O le centre de son cercle circonscrit. Soit D un point de $[BC]$. La droite parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en E. La droite parallèle à (AC) passant par D coupe (AB) en F. Montrer que A, E, O, F sont cocycliques.

Solution.



Soit R la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$. On a $R(B) = A$ et $R(A) = C$.

Comme $(DF)//(AC)$, on a $\widehat{FDB} = \widehat{ACB} = \widehat{CBA} = \widehat{DBF}$, donc FBD est isocèle en F. Par conséquent, $BF = FD$. Or, $AEDF$ est un parallélogramme, donc $FD = AE$, d'où $BF = AE$. On en déduit que $R(F)$ et E sont deux points de $[A, C]$ qui sont à même distance de A, donc $R(F) = E$.

On en déduit l'égalité entre les angles de vecteurs $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$. Par conséquent, $2(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OE}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$, donc les angles de droites (AF, AE) et (OF, OE) sont égaux, ce qui conclut.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et non constante d'entiers strictement positifs tels que a_n divise n^2 pour tout $n \geqslant 1$. Prouver que l'une des affirmations suivantes est vraie :

a) Il existe un entier $n_1 > 0$ tel que $a_n = n$ pour tout $n \geqslant n_1$.

b) Il existe un entier $n_2 > 0$ tel que $a_n = n^2$ pour tout $n \geqslant n_2$.

Solution.

Tout d'abord, puisque pour tout entier n, on a $a_n \in \mathbb{N}^*$, et que la suite (a_n) est croissante et non constante, il existe un entier n_0 tel que $a_n \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant n_0$. Par conséquent, pour tout nombre premier $p > n_0$, on a $a_p = p$ ou $a_p = p^2$.

- Supposons que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait $a_n \leqslant n$. Soit $p > n_0$ un nombre premier. Prouvons par récurrence que $a_n = n$ pour tout $n \geqslant p$. En effet, d'après ci-dessus, on a $a_p = p$. De plus, si $a_n = n$ pour un certain $n \geqslant p \geqslant 2$, alors $n = a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant n+1$, d'où $a_{n+1} = n$ ou $a_{n+1} = n+1$. Mais, a_{n+1} divise $(n+1)^2$, tandis que n ne divise pas $(n+1)^2$. Ainsi, on a $a_{n+1} = n+1$, ce qui achève la récurrence.

Il suffit alors de choisir $n_1 = p$ pour conclure dans ce cas.

- Supposons qu'il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $a_m > m$. S'agissant d'entiers, c'est donc que $a_m \geqslant m+1$. Mais, $m+1 \geqslant 2$ et $m+1$ est premier avec m^2, donc $m+1$ ne peut diviser m^2, et on a alors $a_m \geqslant m+2$. On en déduit que $a_{m+1} \geqslant a_m > m+1$. Une récurrence immédiate assure donc que $a_n > n$ pour tout $n \geqslant m$.

En particulier, compte-tenu de notre remarque initiale, si $p \geqslant m$ est un nombre premier, on a $a_p = p^2$. Soit donc $p > m$ un nombre premier impair. Nous allons prouver par récurrence que $a_n = n^2$ pour tout $n \geqslant p$. Nous venons de voir que c'est vrai pour $n = p$. Supposons que $a_n = n^2$ pour un certain entier $n \geqslant p$. Alors $n \geqslant 3$, d'où $a_{n+1} \geqslant a_n = n^2 > \frac{1}{2}(n+1)^2$. Or, a_{n+1} divise $(n+1)^2$, donc $a_{n+1} = (n+1)^2$. Cela achève la récurrence.

Il suffit donc de choisir $n_2 = p$ pour conclure dans ce cas.

Exercice 3. Prouver que pour tous réels strictement positifs a, b, c tels que $abc = 1$, on a

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Solution.

Soit a, b, c des réels strictement positifs.
Compte tenu de l'inégalité bien connue $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ valable pour tous réels x, y, on a

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2} = \frac{1}{2+a^2+b^2+2b} \leqslant \frac{1}{2(1+ab+b)}$$

De même, et puisque $abc = 1$, on a

$$\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2} \leqslant \frac{1}{2(1+bc+c)} = \frac{ab}{2(ab+ab^2c+abc)} = \frac{ab}{2(1+ab+b)},$$

et

$$\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leqslant \frac{1}{2(1+ac+a)} = \frac{b}{2(b+abc+ab)} = \frac{b}{2(1+ab+b)}.$$

en sommant membre à membre, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}&+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+ab+b}+\frac{ab}{1+ab+b}+\frac{b}{1+ab+b}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 4. Dans le plan, on considère l'ensemble S des points de coordonnées (x, y), où $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2013\}$. Deux points de S sont dits *voisins* s'ils sont à une distance 1 l'un de l'autre. A chaque seconde, une mouche et des araignées se déplacent sur les points de S de la façon suivante : tout d'abord, la mouche soit ne bouge pas, soit va sur un point voisin de celui sur lequel elle se trouve. Puis, chaque araignée soit ne bouge pas, soit va sur un point voisin de celui sur lequel elle se trouve. Plusieurs araignées peuvent se trouver simultanément sur un même point, et la mouche ainsi que les araignées connaissent les positions respectives des unes et des autres.

a) Déterminer le plus petit entier k pour lequel k araignées pourront toujours finir par attraper la mouche en un temps fini, et ce quelles que soient les positions initiales de la mouche et des araignées sur les points de S.

b) Répondre à la même question si l'on suppose cette fois que l'on est dans l'espace usuel et que S est l'ensemble des points de coordonnéees (x, y, z) où $x, y, z \in \{1, 2, \ldots, 2013\}$.

Solution.

Une seule araignée ne peut attraper la mouche : en effet, la mouche peut attendre jusqu'à ce que l'araignée soit sur un point voisin de celui sur lequel elle se trouve. A partir de ce moment, elle se déplace à chaque fois sur un point diagonalement opposé à celui sur lequel est l'araignée si celle-ci est sur un point voisin, et sinon attend où elle est.

On va prouver maintenant que, dans le plan comme dans l'espace, deux araignées suffisent pour attraper la mouche.

Pour cela, on note M la mouche, et on désigne par P et Q les deux araignées. Pour chaque animal A, on note respectivement A_x, A_y et A_z son abscisse, son ordonnée et sa cote.

a) Les araignées P et Q se placent tout d'abord sur le point de coordonnées $(1, 1)$. Puisque M ne peut s'enfuir indéfiniment vers la droite, P peut alors en un temps fini, et en ne se déplaçant qu'horizontalement, se trouver en un point tel que $P_x = M_x$ et $P_y = 1$. De même, Q se place en un point tel que $Q_x = 1$ et $Q_y = M_y$ (il est clair que si P, par exemple, atteint ce premier objectif avant Q, elle peut suivre les déplacements de M en conservant $P_x = M_x$ et $P_y = 1$ et attendre le positionnement adéquat de Q).

A partir de ces positions, atteintes au temps t_0 :

- si M se déplace horizontalement (c'est-à-dire de sorte que M_x change) alors P fait de même afin de conserver $P_x = M_x$.

- sinon, P se déplace verticalement, en allant vers M.

L'araignée Q procède de la même façon, mais en échangeant les rôles des abscisses et ordonnées.

En utilisant cette stratégie et à partir de t_0 , la quantité $|P_y - M_y| + |Q_x - M_x|$ n'augmente jamais. Mais, cette quantité ne reste constante que lors d'un déplacement de M vers la droite ou vers le haut, ce qui ne peut arriver qu'un nombre fini de fois. Par suite, après un temps fini, au moins l'un des deux termes de la somme va être égal à 0, signifiant ainsi la perte de la mouche.

b) Les deux araignées se placent tout d'abord sur le point $(1, 1, 1)$. Puis, en restant dans le plan π d'équation $z = 1$ et par utilisation de la stratégie du a), l'une d'elles va attraper l'ombre de M dans π (i.e. la projection orthogonale de M sur π). Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agit de P, et on a donc $P_x = M_x$ et $P_y = M_y$. Une fois ceci réalisé, P calque ses déplacements sur ceux de M de façon à conserver ces deux égalités. Toutefois, si M se déplace parallèlement à l'axe des cotes ou reste immobile, alors P se déplace parallèlement à l'axe des cotes, mais en allant vers M (et on note qu'on a toujours $P_z \leqslant M_z$). Puisque M_z ne peut augmenter indéfiniment, M ne peut échapper à P qu'en ne faisant qu'un nombre fini de déplacements parallèlement à l'axe des cotes et en ne restant immobile qu'un nombre fini de fois. Par conséquent, à partir d'un instant t_1, la mouche M ne se déplacera plus que dans un même plan π' d'équation $z =$constante, et sans rester immobile.

L'araignée Q vient alors se placer dans le plan π'. Quitte à rester immobile, elle peut rendre la quantité $f = |Q_x - M_x| + |Q_y - M_y|$ paire. A partir de cet instant, noté t_2, Q suit la procédure suivante :

- Si $|Q_x - M_x| > |Q_y - M_y|$ alors Q se déplace parallèlement à l'axe des abscisses, de sorte que $|Q_x - M_x|$ n'augmente pas (Q se déplace horizontalement, le long d'une droite d, en allant vers la projection de M sur la droite d).
- Sinon, Q se déplace parallèlement à l'axe des ordonnées, dans des conditions analogues.

Pour se fixer les idées, on peut supposer que pour tout $t \in \mathbb{N}$, la mouche se déplace à l'instant $t + \frac{1}{3}$ et l'araignée à l'instant $t + \frac{2}{3}$. Puisque ni M ni Q ne reste immobile, le mouvement de M fait augmenter ou diminuer f d'une unité et le mouvement de Q fait diminuer f d'une unité, donc pour tout $t \in \mathbb{N}$, $f(t)$ est pair (en particulier, Q ne se placera jamais sur un point voisin de M) et de plus $f(t+1) \leqslant f(t)$.

Soit $g = \max(|Q_x - M_x|, |Q_y - M_y|)$. On observe que le mouvement de Q ne peut que faire décroître g. De plus,

– Si le mouvement de M à l'instant $t + \frac{1}{3}$ fait décroître g, alors $g(t+1) \leqslant g(t)$.
– Supposons que le mouvement de M à l'instant $t + \frac{1}{3}$ fait croître g. Si par exemple M s'est déplacée dans la direction des x, nécessairement $|Q_x(t) - M_x(t)| \geqslant |Q_y(t) - M_y(t)|$ et M s'est éloignée de Q, donc après le mouvement de M on a $|Q_x - M_x| > |Q_y - M_y|$. Par conséquent l'araignée se déplace dans le même sens que la mouche et on a $g(t+1) = g(t)$.

Dans tous les cas, on voit que $g(t+1) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$, donc il existe $t_2 \in \mathbb{N}$ tel que $g(t) = g(t_2)$ et $f(t) = f(t_2)$ pour tout $t \geqslant t_2$. Supposons par l'absurde que $g(t_2) > 0$.

Quitte changer l'orientation des axes, on peut supposer que $Q_x(t_2) \leqslant M_x(t_2)$ et $Q_y(t_2) \leqslant M_y(t_2)$.

– Premier cas : $Q_y(t_2) = M_y(t_2)$. Comme $f(t_2)$ est pair, on a $M_x(t_2) \geqslant Q_x(t_2) + 2$. Si entre les instants t_2 et $t_2 + 1$ la mouche se déplace dans la direction des y, alors l'araignée se déplace vers la droite, et $g(t_2+1) = g(t_2) - 1$. Impossible. Si la mouche se déplace vers la gauche, alors son déplacement fait diminuer f d'une unité, donc $f(t_2+1) = f(t_2) - 2$. Impossible. On en déduit que la mouche se déplace vers la droite, et du coup l'araignée également. Par une récurrence immédiate, on obtient que $M_x(t_2+k) = M_x(t_2) + k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible.
– Deuxième cas : $Q_x(t_2) = M_x(t_2)$. Analogue.
– Troisième cas : $Q_x(t_2) < M_x(t_2)$ et $Q_y(t_2) < M_y(t_2)$. Comme le déplacement de Q fait diminuer strictement la quantité f, le déplacement de M doit faire augmenter f d'une unité. Par conséquent, entre les instants t_2 et $t_2 + 1$, la mouche doit se déplacer vers la droite ou vers le haut. On en déduit facilement que $Q_x(t_2+1) < M_x(t_2+1)$ et $Q_y(t_2+1) < M_y(t_2+1)$. Par une récurrence immédiate, la suite $(M_x(t_2+k) + M_y(t_2+k))_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, ce qui est impossible puisqu'elle est bornée et à valeurs entières.

Dans tous les cas on a abouti à une contradiction, ce qui prouve que $g(t_2) = 0$ et que l'araignée a rattrapé la mouche à l'instant t_2.

Exercice 5. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à un. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant :

i) quel que soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $f(n + f(n)) = f(n)$

ii) $f(2013) = 1$.

Solution.

Soit f une solution éventuelle.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a) = 1$.
Alors $f(a + 1) = f(a + f(a)) = f(a) = 1$.
Puisque $f(2013) = 1$, on en déduit par récurrence que $f(n) = 1$ pour tout entier $n \geqslant 2013$.

D'autre part, supposons que $a \geqslant 2$ soit un entier tel que $f(n) = 1$ pour tout $n \geqslant a$.

Alors, $a - 1 \geqslant 1$ et $f(a - 1) \geqslant 1$, d'où $a - 1 + f(a - 1) \geqslant a$ et donc d'après le premier paragraphe $f(a - 1) = f(a - 1 + f(a - 1)) = 1$.

Cela assure que $f(n) = 1$ pour tout $n \geqslant a - 1$.

Puisque l'on a vu que $f(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 2013$, on en déduit par récurrence descendante que $f(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Réciproquement, il est clair que la fonction constante $f : n \longmapsto 1$ est une solution du problème.

Finalement, la seule solution est la fonction constante $f : n \longmapsto 1$.

Exercice 6. 1) Soient a et b deux nombres réels tels que $a^n + b^n$ est un entier pour $n = 1, 2, 3, 4$. Montrer que $a^n + b^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Est-il vrai que si a et b sont deux nombres réels tels que $a^n + b^n$ est un entier pour $n = 1, 2, 3$ alors $a^n + b^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Solution.

1) Notons $s = a+b$ et $p = ab$. Soit $S_n = a^n + b^n$. Par hypothèse, S_n est un entier pour $1 \leqslant n \leqslant 4$. Comme pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$S_{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}) = S_1 S_n - pS_{n-1},$$

si on montre que p est un entier alors par récurrence immédiate il s'ensuivra que S_n est un entier pour tout n.

On a

$$S_2 = (a+b)^2 - 2ab = s^2 - 2p$$

donc $2p = S_1^2 - S_2$ est un entier. On a

$$S_4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = S_2^2 - 2p^2$$

donc $2p^2 = S_2^2 - S_4$ est un entier. On en déduit que $(2p)^2 = 2(2p^2)$ est un entier pair. Comme $2p$ est entier, il est pair donc p est bien entier.

2) On a

$$S_3 = (a+b)(a^2 + b^2) - ab^2 - a^2 b = S_1 S_2 - ps,$$

donc si p est un demi-entier (c'est-à-dire que $p - \frac{1}{2}$ est un entier) et si s est un entier pair, alors S_1, S_2, S_3 sont des entiers alors que S_4 est un demi-entier. Par exemple, si $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $b = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors $s = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $S_1 = 2$, $S_2 = 3$, $S_3 = 5$, $S_4 = 17/2$.

Exercice 7. Partant d'un triplet d'entiers relatifs (x, y, z), une opération consiste à ajouter à l'un de ces trois entiers un multiple de l'un des deux autres (ce multiple peut être positif ou négatif). Prouver que si a, b, c sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble, on peut passer du triplet (a, b, c) au triplet $(1, 0, 0)$ en au plus cinq opérations.

Solution.

Si b et c sont nuls alors, puisque $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, on doit avoir $a = 1$ ou $a = -1$. Dans le premier cas, il n'y a rien à faire. Dans le second, par trois opérations successives, on peut passer de $(-1, 0, 0)$ à $(-1, 1, 0)$, puis à $(1, 1, 0)$ et enfin à $(1, 0, 0)$.

On peut donc supposer que b ou c est non nul.

L'objectif est d'atteindre un triplet de la forme $(1, s, t)$ en au plus trois étapes, puisqu'avec deux étapes supplémentaires, il est alors immédiat d'obtenir $(1, 0, 0)$.

On suppose que $c \neq 0$, le cas $b \neq 0$ se traitant de façon analogue.

Afin d'atteindre l'objectif ci-dessus, il suffit de trouver un entier n tel que c et $b+na$ soient premiers entre eux : en effet, supposons pour le moment qu'un tel entier n ait été déterminé et voyons comment la conclusion va en découler.

On pose $b' = b + na$ et, avec une première opération, on peut passer de (a, b, c) à (a, b', c). Ensuite, d'après le théorème de Bézout, on sait qu'il existe deux entiers u et v tels que $ub' + vc = 1$. Après multiplication par $a - 1$, il existe donc deux entiers x et y tels que $xb' + yc = a - 1$. On utilise alors une seconde opération pour passer de (a, b', c) à $(a - xb', b', c)$, puis une troisième pour passer de $(a - xb', b', c)$ à $(a - xb' - yc, b'c) = (1, b', c)$.

Pour conclure, il ne reste donc plus qu'à prouver qu'un tel entier n existe.

Soit E l'ensemble des diviseurs premiers de c qui divisent également au moins un nombre de la forme $b + ka$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Si $E = \emptyset$ alors tout entier n est tel que $\text{pgcd}(c, b + na) = 1$.

Sinon, on note tout d'abord que E est fini car il ne contient que des diviseurs premiers de c, avec $c \neq 0$. Ensuite, pour chaque $p \in E$, il existe un entier k_p tel que $b + k_p a = 0 \mod [p]$. On remarque qu'un tel nombre p ne divise pas a car sinon p diviserait aussi b, en contradiction avec $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$.

D'après le théorème chinois, il existe un entier n tel que $n = k_p + 1 \mod [p]$ pour tout $p \in E$. Prouvons que cet entier n convient :

- Si p divise c et $p \notin E$ alors p ne divise aucun nombre de la forme $b + ka$ et donc, en particulier, ne divise pas $b + na$.
- Si $p \in E$ alors $b + na = b + k_p a + a = a \neq 0 \mod [p]$.

Ainsi, aucun diviseur premier de c ne divise $b+na$, ce qui assure que c et $b+na$ sont bien premiers entre eux.

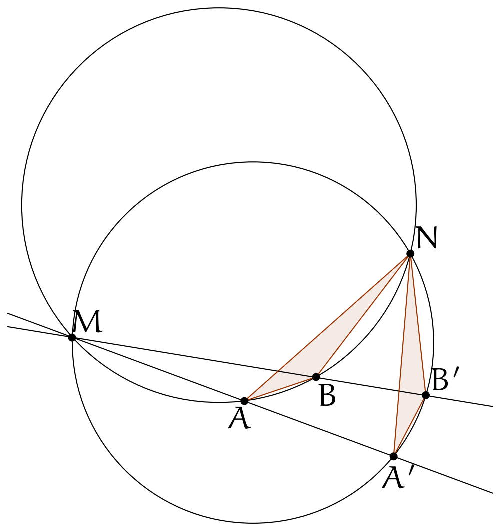
Exercice 8. Soit ABC un triangle. Soient $D \in [AC]$ et $E \in [AB]$ tels que $BE = CD$. Soit P le point d'intersection de (BD) et (CE). Les cercles circonscrits à BEP et CDP se recoupent en Q. Soient K et L les milieux respectifs de $[BE]$ et $[CD]$. Soit R l'intersection entre la perpendiculaire à (QK) passant par K et la perpendiculaire à (QL) passant par L. Montrer que

1) R se trouve sur le cercle circonscrit à ABC ;

2) Q se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution.

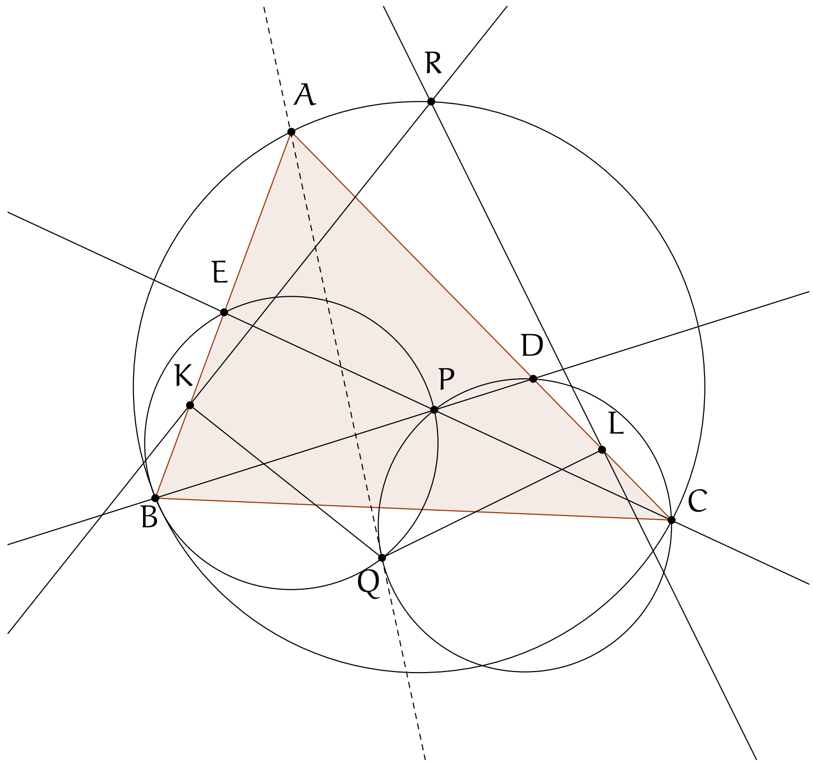
Rappelons d'abord la méthode de construction du centre d'une similitude directe qui envoie deux points distincts A et B sur deux points distincts A' et B' respectivement.



Supposons que $A \neq A'$, $B \neq B'$, et que les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles. Soit M le point d'intersection de (AA') et de (BB'). Alors les cercles MAB et $MA'B'$ se recoupent en un point N. Comme $(NA, NB) = (MA, MB) = (MA', MB') = (NA', NB')$ et $(AB, AN) = (MB, MN) = (MB', MN) = (A'B', A'N)$, les triangles NAB et $NA'B'$ sont directement semblables, donc la similitude de centre N et de rapport NA'/NA envoie A sur A' et B sur B'. On vérifie que le résultat reste vrai si $A = A'$ ou $B = B'$.

Si (AA') et (BB') sont parallèles, alors N est le point d'intersection de (AB) et de $(A'B')$.

Revenons à l'exercice. Montrons d'abord la deuxième assertion.



D'après le préliminaire, Q est le centre de la similitude directe qui envoie B sur D et E sur C. Comme $BE = CD$, cette similitude est une rotation sur l'on notera r. Comme r envoie (AB) sur (AC), Q est équidistant de (AB) et de (AC) donc Q est sur une bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Vérifions que c'est la bissectrice intérieure.

Par un argument de continuité, il suffit de se restreindre au cas où E et D sont strictement à l'intérieur des segments $[AB]$ et $[AC]$. Dans ce cas, A, B et E étant alignés donc non-cocycliques, $Q \neq A$.

De plus, lorsque ABC est isocèle en A et que D et E tendent vers A, les cercles circonscrits à BPE et CPD tendent vers les cercles Γ_1 passant par B et tangent à (AC) en A et Γ_2 passant par C et tangent à (AB) en A. Or, le cercle Γ_1 et le triangle sont du même côté de la droite (AC), le cercle Γ_2 et le triangle sont du même côté de (AB), donc Q tend vers un point à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ ou de celui opposé par le sommet. Ce sera donc un point de la bissectrice intérieure (différent de A puisque $(AB) \neq (AC)$).

En faisant varier les points A, D et E, le point Q reste sur la réunion des deux bissectrices et ne passe pas par A, donc il doit par continuité rester sur la bissectrice intérieure.

Montrons maintenant la première assertion. Comme r envoie (QK) sur (QL) et (AK) sur (AL), les angles de droites (QK, QL) et (AK, AL) sont égaux donc A, K, Q, L sont cocycliques.

Comme les triangles KQR et LQR sont rectangles en K et L, le cercle de diamètre $[QR]$ passe par K et L, donc le cercle circonscrit à QKL rencontre R, ce qui montre que A, K, Q, L, R sont cocycliques.

Soit r' la similitude directe qui envoie K sur B et L sur C. D'après le préliminaire, le centre de r' est le second point d'intersection du cercle ABC avec le cercle AKL, c'est-à-dire R. Comme r' envoie les droites (RK) et (RL) sur (RB) et (RC) respectivement, on en déduit que $(RB, RC) = (RK, RL) = (AK, AL) = (AB, AC)$ où la deuxème égalité provient de la cocyclicité de A, K, L, R. Ceci prouve que A, B, C, R sont cocycliques.

Fin