Olympiades Françaises de Mathématiques
2012-2013

Test du dimanche 24 mars

Durée : 4h

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- On demande des solutions complètement rédigées, où toute affirmation est soigneusement justifiée. La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la copie.
- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
- Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur CHAQUE copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 5. $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à un. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant les deux conditions suivantes :
i) quel que soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $f(n + f(n)) = f(n)$
ii) $f(2013) = 1$.

Exercice 6. 1) Soient a et b deux nombres réels tels que $a^n + b^n$ est un entier pour $n = 1, 2, 3, 4$. Montrer que $a^n + b^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Est-il vrai que si a et b sont deux nombres réels tels que $a^n + b^n$ est un entier pour $n = 1, 2, 3$ alors $a^n + b^n$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 7. Partant d'un triplet d'entiers relatifs (x, y, z), une opération consiste à ajouter à l'un de ces trois entiers un multiple de l'un des deux autres (ce multiple peut être positif ou négatif). Prouver que si a, b, c sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble, on peut passer du triplet (a, b, c) au triplet $(1, 0, 0)$ en au plus cinq opérations.

N.B. On dit que trois entiers a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble si leur plus grand commun diviseur vaut 1.

Exercice 8. Soit ABC un triangle. Soient $D \in [AC]$ et $E \in [AB]$ tels que $BE = CD$. Soit P le point d'intersection de (BD) et (CE). Les cercles circonscrits à BEP et CDP se recoupent en Q. Soient K et L les milieux respectifs de $[BE]$ et $[CD]$. Soit R l'intersection entre la perpendiculaire à (QK) passant par K et la perpendiculaire à (QL) passant par L. Montrer que
1) R se trouve sur le cercle circonscrit à ABC ;
2) Q se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Fin