Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Test du samedi 23 mars

Durée : 4h

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- On demande des solutions complètement rédigées, où toute affirmation est soigneusement justifiée. La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la copie.
- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
- Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur CHAQUE copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1. Soit ABC un triangle isocèle en A. On note O le centre de son cercle circonscrit. Soit D un point de $[BC]$. La droite parallèle à (AB) passant par D coupe (AC) en E. La droite parallèle à (AC) passant par D coupe (AB) en F. Montrer que A, E, O, F sont cocycliques.

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et non constante d'entiers strictement positifs tels que a_n divise n^2 pour tout $n \geqslant 1$. Prouver que l'une des affirmations suivantes est vraie :
a) Il existe un entier $n_1 > 0$ tel que $a_n = n$ pour tout $n \geqslant n_1$.
b) Il existe un entier $n_2 > 0$ tel que $a_n = n^2$ pour tout $n \geqslant n_2$.

Exercice 3. Prouver que pour tous réels strictement positifs a, b, c tels que $abc = 1$, on a

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 4. Dans le plan, on considère l'ensemble S des points de coordonnées (x, y), où $x, y \in \{1, 2, \ldots, 2013\}$. Deux points de S sont dits *voisins* s'ils sont à une distance 1 l'un de l'autre. A chaque seconde, une mouche et des araignées se déplacent sur les points de S de la façon suivante : tout d'abord, la mouche soit ne bouge pas, soit va sur un point voisin de celui sur lequel elle se trouve. Puis, chaque araignée soit ne bouge pas, soit va sur un point voisin de celui sur lequel elle se trouve. Plusieurs araignées peuvent se trouver simultanément sur un même point, et la mouche ainsi que les araignées connaissent les positions respectives des unes et des autres.

a) Déterminer le plus petit entier k pour lequel k araignées pourront toujours finir par attraper la mouche en un temps fini, et ce quelles que soient les positions initiales de la mouche et des araignées sur les points de S.

b) Répondre à la même question si l'on suppose cette fois que l'on est dans l'espace usuel et que S est l'ensemble des points de coordonnéees (x, y, z) où $x, y, z \in \{1, 2, \ldots, 2013\}$.

Fin