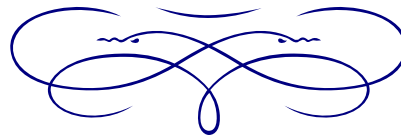


Olympiades Françaises de Mathématiques



2012-2013

Test de sélection du mercredi 15 mai



Durée : 4h30



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- 
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.
- 

-
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

-
- Respecter la numérotation des exercices.
- 
- 

Exercice 1. Sur une ligne on écrit un certain nombre d'entiers strictement positifs. On envisage alors l'opération suivante : choisir deux de ces entiers adjacents, x et y , tels que x est à gauche de y et x est strictement supérieur à y , et remplacer le couple (x, y) par l'un des couples $(y + 1, x)$ ou $(x - 1, x)$.
Montrer que l'on ne peut effectuer qu'un nombre fini de telles opérations.



Exercice 2. Soit p un nombre premier tel que $p - 1$ n'est pas divisible par 3. Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs vérifiant

$$x^3(y^3 + z^3) = p(xyz + 1).$$



Exercice 3. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus ; D , E et F sont respectivement les pieds des hauteurs de ce triangle issues de A , B et C .

On appelle respectivement I_1 et I_2 les centres des cercles inscrits dans les triangles AEF et BDF et respectivement O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles ACI_1 et BCI_2 . Montrer que les droites (I_1I_2) et (O_1O_2) sont parallèles.



Exercice 4. On dit que $\{A, B, C\}$ est une partition de l'ensemble des entiers relatifs \mathbb{Z} si A , B et C sont trois parties non vides et disjointes dont la réunion est \mathbb{Z} .

Si A et B sont deux parties de \mathbb{Z} , on note $A + B$ l'ensemble des entiers qui peuvent s'écrire sous la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Montrer qu'il existe une seule partition de \mathbb{Z} en trois ensembles A , B et C tels que $A + B$, $B + C$ et $C + A$ soient disjoints.



Fin