# *Olympiades Françaises de Mathématiques*
# *2012-2013*

## *Test du mercredi 9 janvier*

*Durée : 4h30*

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le sujet « junior » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- le sujet « olympique » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

# Exercices Juniors

*Exercice 1.* Si $k$ est un entier strictement positif, on désigne par $S(k)$ la somme des chiffres de son écriture décimale.

1) Existe-t-il deux entiers $a$ et $b$ strictement positifs tels que $S(a) = S(b) = S(a+b) = 2013$ ?

2) Existe-t-il deux entiers $a$ et $b$ strictement positifs tels que $S(a) = S(b) = S(a+b) = 2016$ ?

*Exercice 2.* Les réels $a, b, c$ sont distincts et non nuls, et on suppose qu'il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ et $c^3 + cx + y = 0$.

Prouver que $a + b + c = 0$.

*Exercice 3.* Sur le cercle $\Gamma$, on choisit les points $A, B, C$ de sorte que $AC = BC$. Soit $P$ un point de l'arc $AB$ de $\Gamma$ qui ne contient pas $C$. La droite passant par $C$ et perpendiculaire à la droite $(PB)$ rencontre $(PB)$ en $D$.

Prouver que $PA + PB = 2PD$.

*Exercice 4.* Sur un terrain, $2013 \times 2013$ chaises sont placées sur les sommets d'un quadrillage. Chaque chaise est occupée par une personne. Certaines personnes décident alors de changer de place : certaines se décalent d'un cran vers la droite, d'autres de $2$ crans vers l'avant, d'autres de $3$ crans vers la gauche, et d'autres de $6$ crans vers l'arrière. A la fin, chaque chaise est toujours occupée par une seule personne.

Prouver qu'au moins une personne n'a pas changé de place.

# Sujet Olympique

*Exercice 5.* Soit $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant 1$ des réels. On pose $x_{n+1} = 1$.

Prouver que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) + n\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)y_i \geqslant 0.$$

*Exercice 6.* Trouver le plus grand entier $n \geqslant 3$, vérifiant :
"pour tout entier $k \in \{2, 3, \cdots, n\}$ si $k$ et $n$ sont premiers entre eux alors $k$ est un nombre premier."

*Exercice 7.* $A, B, C, D, E$ sont cinq points d'un même cercle, de sorte que $ABCDE$ soit convexe et que l'on ait $AB = BC$ et $CD = DE$. On suppose que les droites $(AD)$ et $(BE)$ se coupent en $P$, et que la droite $(BD)$ rencontre la droite $(CA)$ en $Q$ et la droite $(CE)$ en $T$.

Prouver que le triangle $PQT$ est isocèle.

*Exercice 8.* Soit $n > 0$ un entier. Anne écrit au tableau $n$ entiers strictement positifs distincts. Bernard efface alors certains de ces nombres (éventuellement aucun, mais pas tous). Devant chacun des nombres restants, il écrit un $+$ ou un $-$, et effectue l'addition correspondante. Si le résultat est divisible par $2013$, c'est Bernard qui gagne, sinon c'est Anne.

Déterminer, selon la valeur de $n$, lequel des deux possède une stratégie gagnante.

*Fin*