Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Envoi Numéro 5

À renvoyer au plus tard le vendredi 15 mars

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices classés « juniors » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Prouver que l'équation

$$a^3 + b^5 + c^7 + d^{11} = e^{13}$$

admet une infinité de solutions en entiers strictement positifs.

Exercice 2. Prouver que, pour tous entiers strictement positifs a, b, c, d, on a

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geqslant 2abcd - 1$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3. Le point D appartient au côté $[AC]$ du triangle équilatéral ABC. On note F le projeté orthogonal de D sur (BC), puis K le projeté orthogonal de F sur (AB), et enfin E le projeté orthogonal de K sur (CA). Soit L le milieu de $[BC]$, et P l'intersection des droites (KE) et (FD).

Prouver que la droite (BP) passe par le milieu de $[AL]$.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Pour tout point M à l'intérieur ou sur le bord de $ABCD$, on pose

$$f(M) = MA + MB + MC + MD.$$

Prouver que, pour tout M, on a

$$f(M) \leqslant \max(f(A), f(B), f(C), f(D)).$$

Exercice 5. On considère une grille carrée de 4×4 cases.

Deux cases distinctes ayant un côté commun sont dites *voisines*. Initialement, toutes les cases sont rouges. Par la suite, une case pourra éventuellement changer de couleur et être soit rouge soit bleue. Effectuer une opération sur la case c signifie que l'on change simultanément la couleur de c ainsi que celles de toutes ses voisines (les cases rouges deviennent bleues et les cases bleues deviennent rouges).

Donner toutes les valeurs de n pour lesquelles il existe un groupe de n cases distinctes telles qu'après avoir effectué une opération sur chacune de ces n cases, on obtienne une grille entièrement bleue.

Exercice 6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, où $x_k = \frac{k(k+1)}{2}$ pour tout $k \geqslant 1$.

Prouver que, pour tout $n \geqslant 10$, il existe un entier a_n tel que $S_{n-1} < a_n^2 < S_n$.

Exercices Olympiques

Exercice 7. On considère un ensemble fini E de garçons et de filles.

Une partie G de garçons de E est dite *populaire* si chaque fille de E connaît au moins un des garçons de G. De même, une partie F de filles est dite *populaire* si chaque garçon de E connaît au moins une des filles de F. On suppose que si a connaît b alors b connaît a.

Prouver que le nombre de parties populaires formées par les garçons a la même parité que le nombre de parties populaires formées par les filles.

Exercice 8. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $P(k)$ le plus grand diviseur premier de k.

Prouver qu'il existe une infinité d'entiers n tels que

$$P(n) < P(n+1) < P(n+2).$$

Exercice 9. On note I le centre du cercle inscrit γ dans le triangle ABC et O le centre de son cercle circonscrit. Soit ω_A le cercle qui passe par B et C et qui est tangent à γ. Les cercles ω_B et ω_C sont définis de manière analogue. On note A' l'autre point commun de ω_B et ω_C. Les points B' et C' sont définis de façon semblable.

Prouver que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point K, qui est aligné avec O et I.

Fin