Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Envoi Numéro 5 – Corrigé

Exercices Juniors

Exercice 1. Prouver que l'équation

$$a^3 + b^5 + c^7 + d^{11} = e^{13}$$

admet une infinité de solutions en entiers strictement positifs.

Solution.

Il convient de remarquer que si (a, b, c, d, e) est une solution alors, pour tout entier $k > 0$, le quintuplet

$$(ak^{5\times7\times11\times13}, bk^{3\times7\times11\times13}, ck^{3\times5\times11\times13}, dk^{3\times5\times7\times13}, ek^{3\times5\times7\times11})$$

en est une aussi.

Pour conclure, il suffit donc de trouver une solution. On peut penser à en trouver une telle que

$$a^3 = b^5 = c^7 = d^{11} = \frac{1}{4}e^{13},$$

où $e = 2^t$ pour un certain t à déterminer. Pour cela, t doit être choisi de sorte que $13t - 2$ soit multiple commun de $3, 5, 7, 11$ et 11. En cherchant un peu, on voit que l'on peut prendre $13t - 2 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$, ou encore $t = 89$.

Exercice 2. Prouver que, pour tous entiers strictement positifs a, b, c, d, on a

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geqslant 2abcd-1$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solution.

Si x et y sont des entiers strictement positifs, on a $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$, et ainsi $(x-1)(y-1) \geqslant 0$. Cela conduit à $xy - x - y + 1 \geqslant 0$, et donc à $(2x-1)(2y-1) \geqslant 2xy-1$. Notons que l'égalité a lieu si et seulement si $x = 1$ ou $y = 1$.

Si a, b, c, d sont des entiers strictement positifs, on a donc $(2a-1)(2b-1) \geqslant 2ab-1$ et $(2c-1)(2d-1) \geqslant 2cd-1$, mais aussi $(2ab-1)(2cd-1) \geqslant 2abcd-1$. Ainsi :

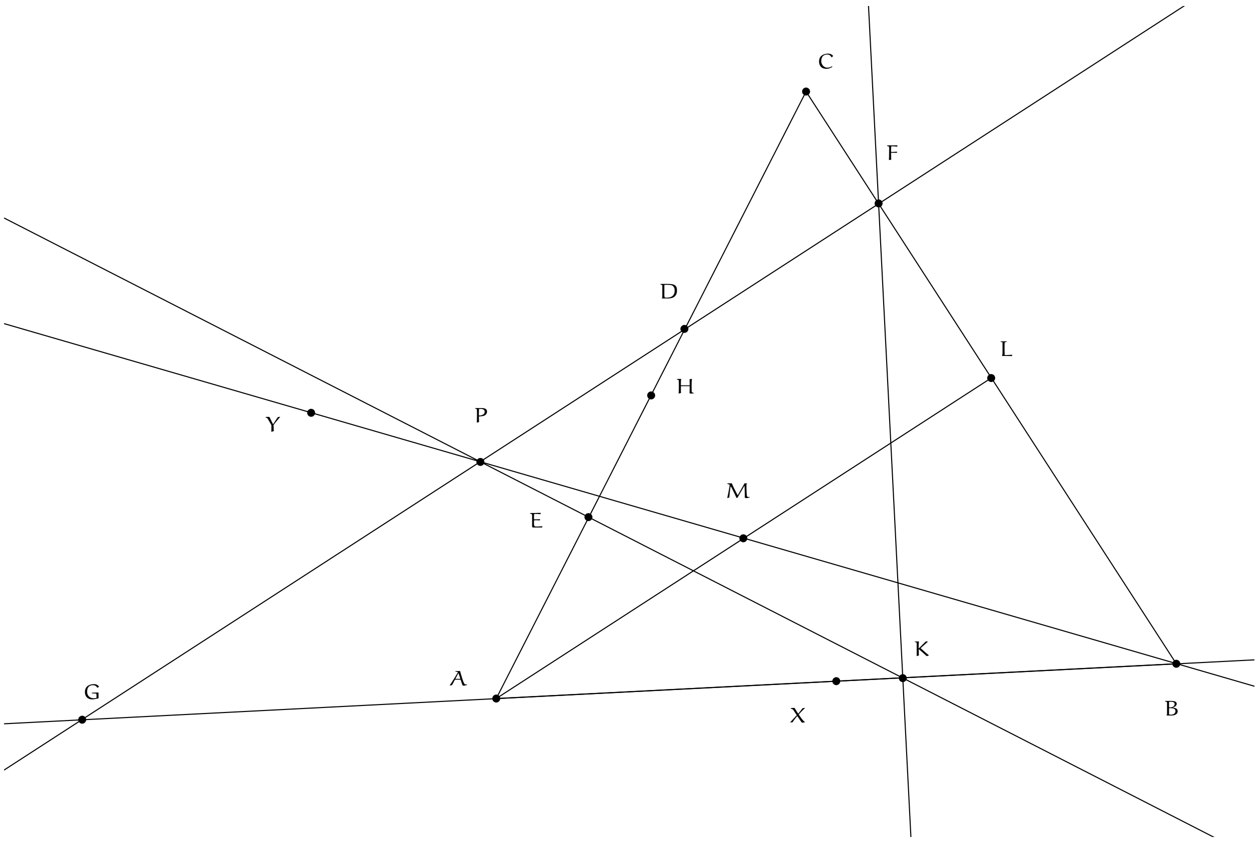
$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geqslant (2ab-1)(2cd-1) \geqslant 2abcd-1.$$

D'après ci-dessus, l'égalité a lieu si et seulement si trois des nombres a, b, c, d sont égaux à 1.

Exercice 3. Le point D appartient au côté $[AC]$ du triangle équilatéral ABC. On note F le projeté orthogonal de D sur (BC), puis K le projeté orthogonal de F sur (AB), et enfin E le projeté orthogonal de K sur (CA). Soit L le milieu de $[BC]$, et P l'intersection des droites (KE) et (FD).

Prouver que la droite (BP) passe par le milieu de $[AL]$.

Solution.



Première solution. Comme les côtés de PKF sont perpendiculaires aux côtés de ABC, le triangle PKF a les mêmes angles intérieurs que ABC et est donc équilatéral, et donc $PF = KF$.

Notons M l'intersection de (BP) et (AL). Comme les triangles BLM et BFP sont semblables, on a

$$\frac{ML}{BL} = \frac{PF}{BF} = \frac{KF}{BF} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'autre part, $\dfrac{AL}{BL} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, donc $AL = 2ML$, ce qui prouve que M est le milieu de $[AL]$.

Deuxième solution. Posons que les côtés de ABC soient de longueur 2, et que $AD = 2a$ avec $a \in [0, 1]$. On en déduit que $DC = 2 - 2a$, $FC = DC\cos(60^\circ) = 1 - a$, et $BF = 1 + a$ Par suite, on a

$$BK = BF\cos(60^\circ) = \frac{1+a}{2} \qquad \text{et} \qquad KF = BF\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+a).$$

Puisque les côtés de PKF sont perpendiculaires aux côtés de ABC, le triangle PKF a les mêmes angles intérieurs que ABC et est donc équilatéral. On a alors $PF = KF = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+a)$.

Le point L étant le milieu de $[BC]$ avec ABC équilatéral, les droites (AL) et (BC) sont donc perpendiculaires, ce qui assure que (ML) et (PF) sont parallèles, où M est l'intersection de (BP) et (AL). D'après le théorème de Thalès, il vient alors

$$\frac{ML}{PF} = \frac{BL}{BF} = \frac{1}{1+a},$$

d'où $ML = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}AL$, ce qui conclut.

Troisième solution. Comme ci-dessus, on remarque que PKF est équilatéral, et on note M l'intersection de (BP) et (AL). Soit Q l'intersection de (FP) et (AB). On a $\widehat{PKQ} = \widehat{PQK} = 30°$, donc PQK est isocèle en P et on a $PQ = PK$. Mais, $PK = KF$ puisque PKF est équilatéral, donc $PQ = KF$ ce qui assure que P est le milieu de $[QF]$. Ayant leurs côtés communs ou parallèles, les triangles BPQ et BMA d'une part, et les triangles BPF et BML d'autre part, sont semblables. Cela conduit à

$$\frac{PQ}{AM} = \frac{PM}{BM} \qquad \text{et} \qquad \frac{PF}{ML} = \frac{PM}{BM}.$$

d'où $\frac{AM}{ML} = \frac{PQ}{PF} = 1$, et M est bien le milieu de $[AL]$.

Quatrième solution. Soit X le milieu de $[AB]$ et Y tel que $ALCY$ soit un rectangle. Alors $XC = AL = CY$ et $\widehat{YCX} = 60°$, donc XCY est équilatéral. Deux de ses côtés étant perpendicualires à deux des côtés du triangle équilatéral ABC, il en est de même de son troisième côté. Soit M l'intersection de (AL) et (BY). Puisque (AL) et (CY) sont parallèles et que $BC = 2BL$, on a $AL = CY = 2ML$, d'où M est le milieu de $[AL]$. Comme ci-dessus, on remarque que KFP est équilatéral car ses côtés sont perpendiculaires à ceux de ABC. Or, il en est de même de XYC, donc les triangles KFP et XCY ont leurs côtés parallèles. Puisque les points B, F, C d'une part, et B, K, X d'autre part sont alignés, il existe donc une homothétie de centre B qui envoie XCY sur KFP. En particulier, le point P appartient à la droite (BY) qui passe par le milieu de $[AL]$.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Pour tout point M à l'intérieur ou sur le bord de $ABCD$, on pose

$$f(M) = MA + MB + MC + MD.$$

Prouver que, pour tout M, on a

$$f(M) \leqslant \max(f(A), f(B), f(C), f(D)).$$

Solution.

Lemme. Si le point K est sur les bords ou à l'intérieur du triangle XYZ, on a

$$XY + XZ \geqslant KY + KZ.$$

Preuve du lemme. Si $K = Y$, le résultat est immédiat d'après l'inégalité triangulaire. Sinon, on note P l'intersection de (YK) avec le côté $[XZ]$. D'après l'inégalité triangulaire, on a alors

$$XY + XZ = XY + XP + PZ \geqslant YP + PZ = YK + KP + PZ \geqslant YK + KZ.$$

Revenons à l'exercice, et considérons un point M à l'intérieur ou sur le bord du quadrilatère convexe $ABCD$. On va commencer par prouver que l'on peut trouver un point P du bord de $ABCD$ tel que $f(M) \leqslant f(P)$. Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O et, sans perte de généralité, on peut supposer que M est dans ou sur les bords du triangle ADO. Les droites (BM) et (CM) recoupent alors le côté $[AD]$ respectivement en X et Y. Soit P un point de $[XY]$. D'après le lemme, puisque M est dans ou sur les bords du triangle BDP, on a $PB + PD \geqslant MB + MD$. Et, puisque M est dans ou sur les bords du triangle CAP, on a $PA + PC \geqslant MA + MC$. En sommant, il vient $f(M) \leqslant f(P)$, avec $P \in [AD]$ comme désiré.

Toujours avec le point $P \in [AD]$ ci-dessus, on montre maintenant que $f(P) \leqslant f(A)$ ou $f(P) \leqslant f(D)$, ce qui terminera la démonstration. En effet, puisque $P \in [AD]$, on a $PA + PD = AD$. On veut maximiser $PB + PC$. Pour cela, on construit le symétrique B' de B par rapport à (AD). On a donc $PB + PC = PB' + PC$. De plus, puisque $ABCD$ est convexe, selon que la droite $(B'C)$ rencontre (AD) en un point de $[AD]$ ou non, le point P est sur dans ou sur les bords de $AB'C$ ou de $DB'C$. D'après le lemme, on a alors $PB' + PC \leqslant AB' + AC = AB + AC$ ou $PB' + PC \leqslant DB' + DC = DB + DC$. Ainsi, on a

$$f(P) = PA + PD + PB + PC \leqslant AD + AB + AC = f(A)$$

ou

$$f(P) = PA + PD + PB + PC \leqslant AD + DB + DC = f(D),$$

comme annoncé.

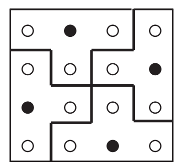
Exercice 5. On considère une grille carrée de 4×4 cases.

Deux cases distinctes ayant un côté commun sont dites *voisines*. Initialement, toutes les cases sont rouges. Par la suite, une case pourra éventuellement changer de couleur et être soit rouge soit bleue. Effectuer une opération sur la case c signifie que l'on change simultanément la couleur de c ainsi que celles de toutes ses voisines (les cases rouges deviennent bleues et les cases bleues deviennent rouges).

Donner toutes les valeurs de n pour lesquelles il existe un groupe de n cases distinctes telles qu'après avoir effectué une opération sur chacune de ces n cases, on obtienne une grille entièrement bleue.

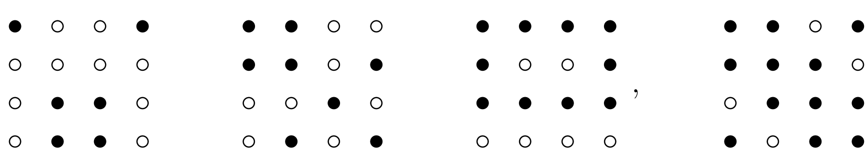
Solution.

Regroupons les cases de la grille en quatre tuiles, contenant chacune une case marquée, comme indiqué dans la figure suivante :



Il est facile de vérifier qu'une opération quelconque change la couleur d'une et une seule de ces cases marquées et qu'une opération effectuée dans une tuile ne modifie pas la couleur des cases marquées des autres tuiles. Si l'on veut rendre la grille entièrement bleue, il faut donc que, dans chaque tuile, le nombre d'opérations effectuées soit impair. La somme de quatre nombres impairs étant paire, cela signifie que le nombre total n d'opérations doit être pair. De plus, puisque dans chaque tuile il y a quatre cases et que les opérations doivent être effectuées sur des cases distinctes, c'est que dans chaque tuile on a fait une ou trois opérations. Par suite, on a $4 \leqslant n \leqslant 12$.

Les seules valeurs de n possibles sont donc $n = 4, 6, 8, 10, 12$. Il reste à prouver que ces cinq valeurs sont bien des solutions. Pour cela, on pourra se reporter à la figure ci-dessus et ses quatre cases marquées et au figures ci-dessous (les points indiquent les cases sur lesquelles on effectue une opération).



Remarques.

Plus généralement, on considère un graphe simple non orienté d'ordre k dont chaque sommet a deux états possibles, rouge ou bleu, et on dispose d'une opération qui revient à changer simutanément l'état d'un sommet et celui de chacun de ses voisins (ici, les sommets sont les cases, deux reliées par une arête si et seulement si elles ont un côté en commun). On note que :

- l'ordre dans lequel sont effectuées les opérations n'a pas d'importance,

- si on effectue deux opérations sur un même sommet, cela revient à ne rien faire du tout. Par suite, on pourra toujours supposer qu'un sommet n'est concerné que par au plus une opération.

On dispose alors des deux théorèmes suivants :

Théorème 1.

Pour tout graphe fini simple et non orienté, à partir d'une configuration où tous les sommets sont rouges, il existe un ensemble de sommets E tel qu'en effectuant une opération sur chaque sommet de E, tous les sommets soient bleus.

Preuve.

On raisonne par récurrence sur le nombre k de sommets, et on suppose directement le résultat vrai pour tout graphe de k sommets. Pour un graphe d'ordre $k+1$, puisque chaque sommet peut-être soit rouge soit bleu, il y a donc 2^{k+1} états globaux possibles (il n'est pas ici supposé qu'ils soient tous accessibles par le jeu des opérations). De même, puisque chaque opération peut être effectuée ou non, il a 2^{k+1} ensembles possibles de sommets sur lesquels effectuer les opérations.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il soit impossible d'atteindre l'état où tous les sommets sont bleus. C'est donc qu'il existe deux ensembles de sommets, disons T_1 et T_2, distincts et qui conduisent au même état final. Il est alors facile de vérifier que l'ensemble $S = T_1 \Delta T_2$ (la différence symétrique) est un ensemble non vide de sommets pour lequel effectuer une opération sur chaque sommet de S ne change pas l'état global de la configuration. En particulier, chaque sommet L de S doit être reliée à un nombre impair de sommets de S (hors elle-même). Or, il est bien connu que, dans tout graphe simple non orienté, la somme des degrés est paire (c'est le double du nombre d'arêtes). En considérant le sous-graphe formé uniquement des sommets de S, on en déduit que $|S|$ est pair.

Par ailleurs, puisque chaque sommet du graphe initial qui n'est pas dans S doit être relié à un nombre pair de sommets de S, effectuer n'importe quelle opération ne change pas la parité du nombre de sommets de S qui sont rouges. Fixons maintenant un sommet L dans S. D'après l'hypothèse de récurrence, il est possible de rendre tous les sommets bleus sauf L, qui lui se doit de rester rouge sans quoi tous les sommets seraient bleus, en contradiction avec notre hypothèse. Mais alors, entre l'état initial et l'état final, la parité du nombre de sommets de S qui sont bleus n'est pas conservée, ce qui fournit la contradiction attendue.

Théorème 2.

Dans les conditions du théorème 1, si deux suites d'opérations S et S' permettent chacune de rendre tous les sommets bleus, alors $|S| = |S'| \bmod[2]$,

où $|s|$ désigne le nombre d'opérations effectuées dans la suite s.

Preuve.

Comme précédemment, sans perte de généralité, on peut supposer qu'au plus une opération est effectuée par sommet (cela ne change pas la parité totale). Du coup, on peut raisonner sur l'ensemble des sommets concernés.

On reprend les notations de la preuve précédente, et on prouve un peu plus que souhaité en remarquant que si deux ensembles de sommets T_1 et T_2 distincts conduisent à un même état final (pas forcément celui où tous les sommets sont bleus), alors on a toujours $|S|$ est pair. Et, puisque $|S| = |T_1| + |T_2| - 2|T_1 \cap T_2|$, on a directement $|T_1| = |T_2| \bmod[2]$.

On retrouve évidemment les résultats démontrés dans le cas particulier de l'exercice.

Déterminer la parité commune des suites d'opérations qui rendent l'ensemble des sommets bleus dépend de la strucure du graphe, pas seulement du nombre de sommets etc... et il ne semble pas qu'il soit connu de résultat simple et général.

Exercice 6. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, où $x_k = \frac{k(k+1)}{2}$ pour tout $k \geqslant 1$.

Prouver que, pour tout $n \geqslant 10$, il existe un entier a_n tel que $S_{n-1} < a_n^2 < S_n$.

Solution.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Il suffit donc de prouver que, pour $n \geqslant 10$, on a $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} > 1$, car alors l'intervalle $]S_{n-1}, S_n[$ contiendra forcément un entier.

Or, d'après le calcul ci-dessus, l'inégalité $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} > 1$ est équivalente à

$$\sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} - \sqrt{\frac{n(n+1)(n-1)}{6}} > 1,$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{n(n+1)}{6}}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}) > 1.$$

Puisque

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = \frac{3}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1}},$$

on veut prouver que

$$\sqrt{3n(n+1)} > \sqrt{2(n+2)} + \sqrt{2(n-1)}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que $\sqrt{3n(n+1)} > 2\sqrt{2(n+2)}$. Cette dernière inégalité s'écrit aussi $3n^2 - 5n - 16 > 0$. Il est facile de vérifier qu'elle est satisfaite pour $n \geqslant 10$.

Exercices Olympiques

Exercice 7. On considère un ensemble fini E de garçons et de filles.

Une partie G de garçons de E est dite *populaire* si chaque fille de E connaît au moins un des garçons de G. De même, une partie F de filles est dite *populaire* si chaque garçon de E connaît au moins une des filles de F. On suppose que si a connaît b alors b connaît a.

Prouver que le nombre de parties populaires formées par les garçons a la même parité que le nombre de parties populaires formées par les filles.

Solution.

Première solution. On dira qu'un ensemble X de garçons est *étranger* à un groupe Y de filles si aucun garçon de X n'est connu d'une des filles de Y. De même, un ensemble Y de filles sera dit *étranger* à un groupe X de garçons si aucune fille de Y n'est connue d'un des garçons de X. Puisque la relation "se connaître" est supposée symétrique, on en déduit que X est étranger à Y si et seulement si Y est étranger à X. Cela ouvre la porte à un double-comptage :

On note N le nombre de couples (X, Y) de groupes X de garçons et Y de filles mutuellement étrangers. Soit X un groupe de garçons. On note Y_X le plus grand groupe de filles qui soit étranger à X. Clairement, tout groupe Y de filles qui est étranger à X est contenu dans Y_X et, réciproquement, tout sous-ensemble de Y_X est étranger à X. Par suite, le nombre de groupes Y qui sont étrangers à X est $2^{|Y_X|}$ (où $|A|$ désigne le nombre déléments de l'ensemble A). On en déduit que

$$N = \sum_X 2^{|Y_X|}.$$

Or, pour tout groupe X de garçons, on a X populaire si et seulement si $Y_X = \emptyset$, c.à.d. $2^{|Y_X|} = 1$. Ainsi, le nombre de groupes populaires de garçons est congru à N modulo 2.

Un raisonnement analogue montre que le nombre de groupes populaires de filles est lui aussi congru à N modulo 2, ce qui conclut.

Deuxième solution. Soit G l'ensemble des garçons et F celui des filles. Nous allons prouver le résultat par récurrence sur $n = |G|$. On note tout d'abord que si F ou G est vide, la conclusion est immédiate (il n'existe aucun groupe populaire). Cela assure le résultat pour $n = 0, 1$ et on considère maintenant un groupe de $n + 1 \geqslant 2$ personnes dans lequel il y a au moins une fille et au moins un garçon.

Soit g un des garçons. On pose $G' = G - \{g\}$ et F' l'ensemble des filles qui ne connaissent pas g. Alors :

- un groupe populaire de garçons dans $G' \cup F$ l'est encore dans $G \cup F$,

- un groupe populaire de garçons dans $G \cup F$ qui ne l'est plus dans $G' \cup F$ est la réunion d'un groupe populaire de garçons dans $G' \cup F'$ et de $\{g\}$.

Il en découle que le nombre $N(G, F)$ de groupes populaires de garçons dans $G \cup F$ est la somme du nombre $N(G', F)$ de groupes populaires de garçons dans $G' \cup F$ et du nombre $N(G', F')$ de groupes populaires de garçons dans $G' \cup F'$, soit donc $N(G, F) = N(G', F) + N(G', F')$.

D'autre part :

- un groupe populaire de filles dans $G \cup F$ l'est encore dans $G' \cup F$,

- un groupe populaire de filles dans $G' \cup F$ qui ne l'est plus dans $G \cup F$ est un groupe populaire de filles dans $G' \cup F'$.

Par conséquent, le nombre $M(G, F)$ de groupes populaires de filles dans $G \cup F$ est la différence entre le nombre $M(G', F)$ de groupes populaires de filles dans $G' \cup F$ et le nombre $M(G', F')$ de groupes populaires de filles dans $G' \cup F'$, soit donc $M(G, F) = M(G', F) - M(G', F')$.

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, on a $N(G', F) = M(G', F)$ mod[2] et $N(G', F') = M(G', F') = -M(G', F')$ mod[2], d'où $N(F, G) = M(F, G)$ mod[2], ce qui achève la récurrence.

Troisième solution. On note toujours respectivement F et G l'ensemble des filles et celui des garçons. Pour chaque fille f et chaque garçon g, on pose $h(f, g) = 0$ si f et g se connaissent, et $h(f, g) = 1$ sinon. Alors, un ensemble X de garçons est populaire si et seulement si $\prod_{f \in F}(1 - \prod_{g \in X} h(f, g)) = 1$. Par suite, le nombre N de groupes populaires de garçons est

$$\begin{aligned} N &= \sum_{X \subseteq G} \prod_{f \in F}(1 - \prod_{g \in X} h(f, g)) \\ &= \sum_{X \subseteq G} \prod_{f \in F}(1 + \prod_{g \in X} h(f, g)) \mod 2 \\ &= \sum_{X \subseteq G} \sum_{Y \subseteq F} \prod_{g \in X} \prod_{f \in Y} h(f, g) \mod 2. \end{aligned}$$

On a une égalité similaire pour le nombre M de groupes populaires de filles, ce qui conclut.

Exercice 8. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $P(k)$ le plus grand diviseur premier de k.

Prouver qu'il existe une infinité d'entiers n tels que

$$P(n) < P(n+1) < P(n+2).$$

Solution.

Soit p un nombre premier impair. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note $n_k = p^{2^k} - 1$. On a évidemment $P(n_k + 1) = p$. D'autre part, pour tout entier i tel que $0 < i < k$, on a

$$p^{2^k} = (p^{2^i})^{2^{k-i}} = (-1)^{2^{k-i}} = 1 \mod p^{2^i} + 1,$$

d'où $n_k + 2 = 2 \bmod[n_i + 2]$.

Les entiers $n_k + 2$ et $n_i + 2$ étant pairs, il vient alors $\text{pgcd}(n_k + 2, n_i + 2) = 2$. Or $n_k + 2$ n'est pas uns puissance de 2, car $p^{2^k} = 1 \mod 4$ pour $k \geqslant 1$ et donc $n_k = 2 \mod 4$. Puisque $n_k + 2 > 1$, il existe donc un nombre premier impair q_k qui divise $n_k + 2$ et aucun des $n_i + 2$ pour $i < k$. Cela assure qu'il existe une infinité de nombres premiers impairs qui divisent chacun au moins un des $n_k + 2$, et donc que la suite $(P(n_k + 2))_{k \geqslant 1}$ n'est pas bornée. On peut donc considérer k minimal tel que $P(n_k + 2) > p$.

Pour conclure, il reste à prouver que, pour ce choix de k, on a $P(n_k) < p$. Or, on a

$$n_k = (p^{2^{k-1}} + 1)(p^{2^{k-1}} - 1) = (n_{k-1} + 2)n_{k-1},$$

d'où, par une récurrence,

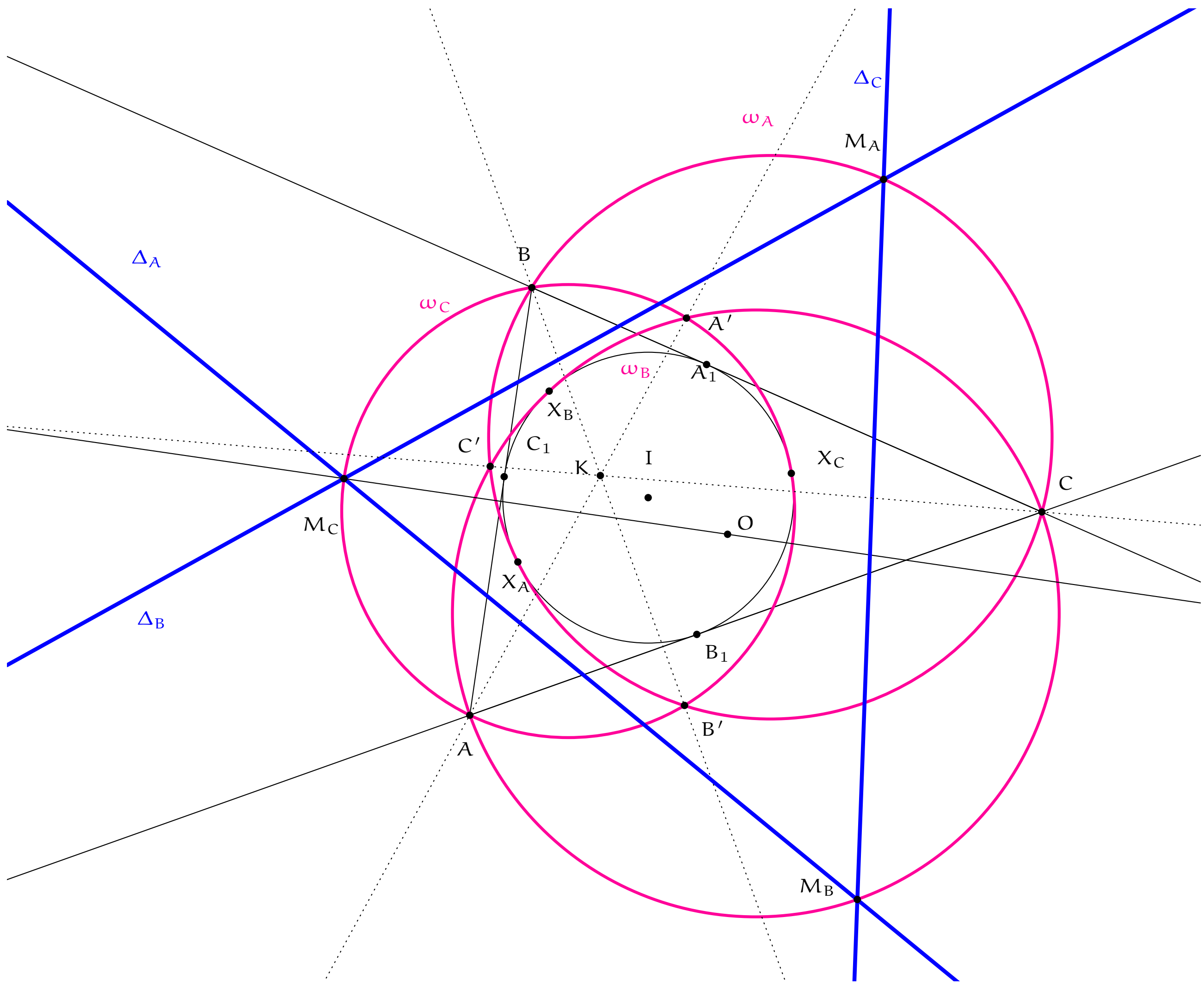
$$n_k = (p-1)\prod_{i=1}^{k-1}(n_i + 2).$$

Puisque $n_k + 1$ est divisible par p, ce ne peut être le cas pour n_k, et la minimalité de k assure qu'aucun des facteurs $n_i + 2$ n'est divisible par un nombre premier supérieur à p. Ainsi, n_k n'a pas de diviseur premier supérieur ou égal à p, et donc $P(n_k) < p$, comme souhaité.

Exercice 9. On note I le centre du cercle inscrit γ dans le triangle ABC et O le centre de son cercle circonscrit. Soit ω_A le cercle qui passe par B et C et qui est tangent à γ. Les cercles ω_B et ω_C sont définis de manière analogue. On note A' l'autre point commun de ω_B et ω_C. Les points B' et C' sont définis de façon semblable.

Prouver que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point K, qui est aligné avec O et I.

Solution.



On note respectivement A_1, B_1, C_1 les points de contact de γ avec les côtés $[BC], [CA], [AB]$. Soit X_A le point de commun des cercles γ et ω_A.

Le cercle ω_A est l'image de γ par une homothétie de centre X_A, qui envoie A_1 en un point M_A de ω_A en lequel la tangente à ω_A est parallèle à (BC). Par conséquent, ce point M_A est le milieu de l'arc BC de ω_A qui ne contient pas X_A, ce qui assure que

$$\widehat{M_A X_A B} = \widehat{M_A X_A C} = \widehat{M_A B C} = \widehat{M_A B A_1}.$$

Comme, on a évidemment $\widehat{A_1 M_A B} = \widehat{B M_A X_A}$, c'est que les triangles $M_A B A_1$ et $M_A X_A B$ sont semblables. Il vient alors

$$\frac{M_A B}{M_A X_A} = \frac{M_A A_1}{M_A B},$$

ou encore $M_AB^2 = M_AA_1 \cdot M_AX_A$.

Cette dernière relation signifie que M_A appartient à l'axe radical Δ_B de B et γ. De même, M_A appartient à l'axe radical Δ_C de C et γ. Notons que cet axe radical Δ_C est perpendiculaire à la droite (CI). Or, puisque A_1 et B_1 sont les points de contact avec γ des des deux tangentes à γ issues de C, les droites (A_1B_1) et (CI) sont perpendiculaires, d'où l'on peut affirmer que Δ_C est parallèle à (A_1B_1). De même, les droites Δ_B et (A_1C_1) sont parallèles.

On définit les points X_B, X_C, M_B, M_C et la droite Δ_A de façon analogue à ci-dessus, et on prouve de même que M_B appartient à Δ_A et Δ_C, que M_C appartient à Δ_A et Δ_B, et que les droites Δ_A et (B_1C_1) sont parallèles. On remarque alors que Δ_A, Δ_B et Δ_C portent les côtés du triangle $M_AM_BM_C$, et les parallélismes signalés ci-dessus assurent que le triangle $M_AM_BM_C$ est l'image de $A_1B_1C_1$ par une homothétie Φ, dont on note K le centre et

$$r = \frac{M_AK}{A_1K} = \frac{M_BK}{B_1K} = \frac{M_CK}{C_1K}$$

le rapport. En particulier, les droites (M_AA_1), (M_BB_1) et (M_CC_1) sont concourantes en K.

Si l'on évalue la puissance de K par rapport à γ, il vient $KA_1 \cdot KX_A = KB_1 \cdot KX_B$. Après multiplication des deux côtés par r, on obtient $M_AK \cdot KX_A = M_BK \cdot KX_B$. Cela signifie que K appartient à l'axe radical (CC') des cercles ω_A et ω_B. On prouve de même que K appartient à (AA') et à (BB').

Soit O' l'image de I par Φ. Le point O' appartient donc à la droite passant par M_A et parallèle à (A_1I) (et donc perpendiculaire à (BC)). Comme M est le milieu d'un arc BC de ω_A, cette droite est donc la médiatrice de $[BC]$. De même, le point O' appartient à la médiatrice de $[AC]$, et finalement c'est que $O' = O$. Par suite, les points I, O, K sont alignés.

Fin